D&T 3월 학평 대비 수학 (가)형/ (나)형 답지와 해설지입니다.

D&T
Definition & Theorem

(가)형 정답

문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점
1	⑤	2	*9*	①	3	*17*	②	4	*25*	12	3
2	④	2	*10*	⑤	3	*18*	⑤	4	*26*	4	4
3	②	2	*11*	④	3	*19*	③	4	*27*	81	4
4	③	3	*12*	①	3	*20*	④	4	*28*	18	4
5	①	3	*13*	③	3	*21*	②	4	*29*	17	4
6	③	3	*14*	①	4	*22*	120	3	*30*	170	4
7	⑤	3	*15*	②	4	*23*	10	3			
8	④	3	*16*	②	4	*24*	2	3			

(나)형 정답

문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점	문항 번호	정 답	배 점
1	③	2	*9*	⑤	3	*17*	⑤	4	*25*	45	3
2	④	2	*10*	②	3	*18*	①	4	*26*	315	4
3	④	2	*11*	①	3	*19*	⑤	4	*27*	17	4
4	②	3	*12*	③	3	*20*	③	4	*28*	72	4
5	③	3	*13*	④	3	*21*	④	4	*29*	143	4
6	①	3	*14*	②	4	*22*	19	3	*30*	90	4
7	①	3	*15*	⑤	4	*23*	25	3			
8	③	3	*16*	④	4	*24*	9	3			

(가)형 해설

1.

$\tan\theta = 3$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 이다.

$\therefore\ \sec^2\theta = 10$

2.

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 이므로 $f'(e) = 0$ 이다.

3.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-1}{x}\times\frac{\sin x}{\sin x} = \ln 3$

4.

$\log_2 x = 1 + \log_4 x$

$\Leftrightarrow\ \log_2 x = 1 + \dfrac{1}{2}\log_2 x$

이므로 $x = 4$ 이다.

5.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\tan x\, dx = \Big[\ sec\, x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$

6.

세 사람 A, B, C가 바로 뜀틀을 넘어야 하는 순서가 정해여 있으므로 A, B, C를 똑같이 생각한다. (같은 것이 있는 순열)

즉, $\dfrac{5!}{3!} = 20$ (가지)이다.

7.

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow\ \sin x = \sqrt{3}\cos x$

$\therefore\ \tan x = \sqrt{3}$

8.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{e^4-1}{4}$

9.

$C_1 = W_1 \times \log_2 256$

$C_2 = W_2 \times \log_2 512$

이므로 $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{\frac{4}{3}C_2}{C_2} = \dfrac{8W_1}{9W_2}$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{3}{2}$

10.

곡선 $y = \dfrac{k}{x}$ 위의 한 점 $\left(t,\ \dfrac{k}{t}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y = -\dfrac{k}{t^2}(x-t) + \dfrac{k}{t}$ $\cdots$ (ㄱ)

이때, 직선 $y = -\dfrac{k}{t^2}(x-t) + \dfrac{k}{t}$ 은

두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 0)$을 지나므로 직선의 기울기는 $-\dfrac{k}{t^2} = -\dfrac{1}{4}$ 이다. 또한, (ㄱ)에 $(0,\ 1)$을 대입하면, $\dfrac{2k}{t} = 1$ 이다. 두 식을 연립하면, $k = 1$ 이다.

11.

자연수 8을 세 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

$8 = 1+1+6$

$\ \ = 1+2+5$

$\ \ = 1+3+4$

$\ \ = 2+2+4$

$\ \ = 2+3+3$

이므로 5 (가지)이다.

12.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\Rightarrow\ \sqrt{a}+1 = b$ $\cdots$ (ㄱ)

또한, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 이다.

$\Rightarrow\ -\dfrac{1}{2\sqrt{a}} = -\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ (ㄴ)

(ㄱ)과 (ㄴ)을 연립하면,

$a = 4$, $b = 3$ 이므로 $a+b = 7$ 이다.

13.

$\displaystyle\pi\int_0^4 \frac{1}{2}\times\left(\frac{mx}{2}\right)^2 dx$

$= \pi\times\left[\dfrac{m^2x^3}{24}\right]_0^4$

$= \dfrac{8m^2}{3}\pi$

$= \dfrac{3}{2}\pi$

이므로 $m = \dfrac{3}{4}$ 이다.

14.

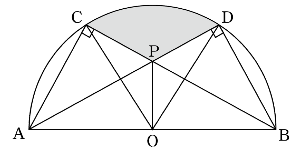
$\mathrm{B}(t,\ \log_{\sqrt{2}} t)$, $\mathrm{C}(t+2,\ \log_{\sqrt{2}}(t+2))$라 하면,

$\log_{\sqrt{2}} t = \log_a(t+2)$ $\cdots$ (ㄱ)

$\log_{\sqrt{2}}(t+2) = \log_a(t+2) + 2$ $\cdots$ (ㄴ)

이므로 (ㄱ)과 (ㄴ)을 연립하면 $t = 2$ 이고 $a = 2$ 이다.

15.



반원의 중심을 O라 할 때, 선분 OA의 길이가 6이고 삼각형 ABP의 넓이가 $12\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}} = 2\sqrt{3}$ 이다. 그러므로

$\angle\mathrm{OAP} = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{ODB} = \angle\mathrm{BOD} = \dfrac{\pi}{3}$ 이고,

삼각형 OBD는 정삼각형이다. 마찬가지로 삼각형 OAC도 정삼각형이므로, $\angle\mathrm{COD} = \dfrac{\pi}{3}$ 이다.

색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 OCD의 넓이에서 삼각형 OCP, ODP의 넓이의 합을 빼면 되므로

$\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\pi}{3} - 2\times\dfrac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3} = 6\pi - 6\sqrt{3}$

$\therefore 6\pi - 6\sqrt{3}$

16.

A=(철수, 영희), B=(영수, 민지)로 묶어서 생각한다.

1) A=(철수, 영희)가 스크린에 가까운 열에 예매를 할 경우 B=(영수, 민지)는 스크린에서 떨어진 자리를 예매해야 한다. 이때, 기강이는 남는 자리를 선택하면 된다.

$\Rightarrow\ {}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1 = 16$

2) B=(영수, 민지)가 스크린에 가까운 열에 예매를 할 경우는 (1)과 같다.

$\Rightarrow\ {}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1 = 16$

3) A와 B가 스크린에서 먼 열에 예매를 하면,

$\Rightarrow\ {}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1 = 8$

한편, 철수는 영희와 자리를 바꿀 수 있고, 영수는 민지와 자리를 바꿀수 있으므로

$(16+16+8)\times 2\times 2 = 160$ (가지) 이다.

17.

$g'(x) = xf(x)$ 인데,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} g\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{6}$ 에서 $\dfrac{1}{x}$ 를 t로 치환하면

$x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ 임을 알 수 있다.

$\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} g\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^3 \frac{g(t)}{t^2}\,dt$ 에서

$\displaystyle\int_1^3 \frac{g(t)}{t^2}dt$ (부분적분법 이용)

$\displaystyle= \left[-\frac{g(t)}{t}\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{g'(t)}{t}\,dt$

$\displaystyle= \frac{3g(1)-g(3)}{3} + \int_1^3 \frac{tf(t)}{t}\,dt$

$= \dfrac{3g(1)-g(3)}{3} + 2$

$= \dfrac{1}{6}$

이므로 $g(3) - 3g(1) = 6 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$

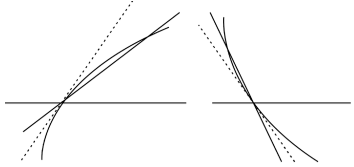
18.

ㄱ. (참)

$\left(\frac{1}{4}\right)^1 > \log_2 1,\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} = \log_2 x_1,\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \log_2 2$

이므로 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 $y=\log_2 x$의 그래프가 구간 (1, 2) 내에서 $x=x_1$인 점에서 만난다.

ㄴ. (참)



$y=\log_2 x$ 위의 점 (1, 0)에서의 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=-\log_2 x$ 위의 점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는 $-m$이다.

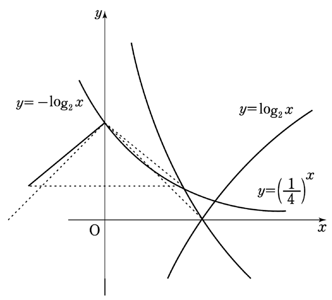
$y_2(x_1-1)>y_1(1-x_2)$을 정리하면

$-\frac{y_2-0}{x_2-1} > m > \frac{y_1-0}{x_1-1}$ 가 성립한다.

ㄷ.

$(x_1-1)(1-y_2)<x_2y_1$을 정리하면

$-\frac{y_2-1}{x_2-0} < \frac{y_1-0}{x_1-1}$



이 때, $\frac{y_1-0}{x_1-1} > \frac{\log_2 2-\log_2 1}{2-1}=1$이고,

$\frac{y_2-1}{x_2-0}>-1 \Leftrightarrow -\frac{y_2-1}{x_2-0}<1$이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19.

1) $a=b=c=0$인 경우

$\Rightarrow$ 1 (가지)

2) $a=b=0$인 경우 (단, $c\neq 0$)

$0<c^2\leq 30$인데, c가 음수가 되는 경우를 생각해야 한다. $\Rightarrow$ 10 (가지)

3) $a=0$인 경우 (단, $b\neq 0$, $c\neq 0$)

$0<b^2\leq c^2\leq 30$인데, b와 c가 음수인 경우를 생각해야 한다. $\Rightarrow {}_5\mathrm{H}_2\times 2^2=60$ (가지)

4) $0<a^2\leq b^2\leq c^2\leq 30$인 경우

a, b, c가 음수인 경우도 생각해야 한다.

$\Rightarrow {}_5\mathrm{H}_3\times 2^3=280$ (가지)

이를 종합하면, 351 (가지)이다.

20.

$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\mathrm{A}$

라 하자.

$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\mathrm{A}\ \cdots$ (ㄱ)

이고

$\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\mathrm{A}$

인데,

$\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\mathrm{A}\ \cdots$ (ㄴ)

이다.

($\because\ \sin(\pi-x)=\sin x,\ \cos(\pi-x)=-\cos x$)

(ㄱ)+(ㄴ)을 하면

$2\mathrm{A}=\mathrm{A}+\mathrm{A}=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx$이므로

$\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 인데,

$t=\cos x$라 치환했으므로

$\mathrm{A}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$

$\Rightarrow$ (가): $1+t^2$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \Leftrightarrow 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}$이다.

$\Rightarrow$ (나): $\frac{\pi^2}{4}$

즉, $g(t)=1+t^2$, $a=\frac{\pi^2}{4}$이므로

$\frac{g\left(\frac{\pi}{3}\right)-1}{a}=\frac{\frac{\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{9}$

21.

(나) 조건에서

$g'(f(0))=\frac{1}{b}$의 양변에 $f'(0)$를 곱해주면,

$f'(0)g'(f(0))=\frac{f'(0)}{b}$ 이므로

$f'(0)=b$이다.

즉, $\frac{b}{c}=b$인데, $b>1$이므로 $c=1$이다.

또한, (가) 조건에서 $g(\ln 2)=c=1$이므로

$f(1)=\ln(2+a+b)=\ln 2$이다.

$\Rightarrow a+b=0\ \cdots$ (ㄱ)

(ㄱ)에 의해 (나) 조건에서

$g'(f(c))=-a=b$이고,

$f'(c)=f'(1)=\frac{3-b}{2}=\frac{1}{b}$이다.

정리하면,

$b^2-3b+2=0 \Leftrightarrow b=1$ or 2

인데, $b>1$이므로 $b=2$이다.

그러므로 $f(x)=\ln\left(x^3-2x^2+2x+1\right)$이고,

$f(2)=\ln 5$이므로 $g'(\ln 5)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{5}{6}$이다.

* $f(x)$와 $g(x)$가 역함수 관계이므로

$f(g(x))=x \Rightarrow f'(g(x))g'(x)=1$

$f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow g(\beta)=\alpha$ 임을 이용하면

$f'(\alpha)g'(\beta)=1$이다.

또한, $f(x)$는 증가함수이다. $\left(\because\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right)$

22.

${}_9\mathrm{C}_3+{}_9\mathrm{C}_2=120$

23.

$f(\sqrt{x})$를 미분하면,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})=1+\frac{4}{x}$ 이고 $x=1$을 대입하면,

$f'(1)=10$이다.

24.

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2k$의 그래프가 x축과 만나는 점이 있으면, $f(x)$의 변곡점이 존재한다.

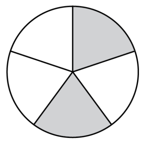
모든 실수 x에 대하여

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2k\geq 2-2k$ ($\because$ 산술기하)

이므로 $k\geq 2$이면, $f(x)$가 변곡점을 가진다.

25.

햄과 두부를 서로 붙어 있지 않도록 담으려면, 다음 그림과 같이 색칠된 부분에 햄과 두부가 담겨야 한다.



햄과 두부를 묶어서 생각하면, 서로 다른 4개의 반찬을 원형도시락에 담는 것과 같다. 이때, 햄과 두부는 서로 자리를 바꿀 수 있으므로

$3!\times 2=12$ (가지)이다.

26.

$f'(x)=x\cos x$이므로 부분적분하여 $f(x)$를 구하면,

$f(x)=\int x\cos x\,dx$

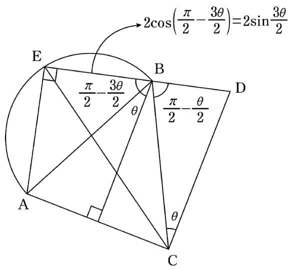
$\quad=x\sin x+\cos x+C$

(단, C는 적분상수)

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$C=-1$이다. $\therefore\ \{f(\pi)\}^2=4$

27.



$\angle \mathrm{CBD}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{CBD}=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\theta$

이므로 $\angle \mathrm{ABE}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$, $\angle \mathrm{EBC}=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$,

$\overline{\mathrm{EB}}=2\sin\frac{3}{2}\theta$ 이다.

따라서 삼각형 EBC의 넓이를 구하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{EB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}$

그러므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\theta}=3$

이다. $\therefore\ 9\alpha^3=81$

28.

함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하자.

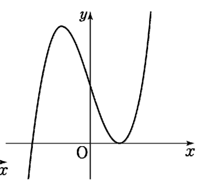
(가) 조건에 의해서 $f(-2)=0$, $g(-2)=0$

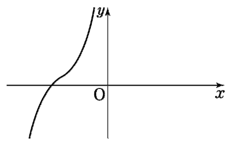
(나) $x>-2$ 에서 $f(x)$가 연속이므로

$x>-2$ 에서 $g(x)\geq 0$ 이다.

이 때,

$y=g(x)$ 의 그래프로 가능한 경우는 다음과 같다.





(다) 조건에 의하여 함수 $f(x)=\sqrt{g(x)}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않으므로 함수 $g(x)$의 그래프는 위 그래프 중 x축에서 접하는 점이 생기는 두 번째 그래프만 조건을 만족시킨다.

즉, $g(x)=(x+2)(x-1)^2$

29.

n번째에 던진 주사위에서 나온 눈의 수를 b_n 이라 하면,

$a_3+a_4=2b_1+2b_2+2b_3+b_4=22$ 이다.

또한,

$2a_1+a_2\leq 2a_2\leq a_3+a_1$

$\Leftrightarrow\ 3b_1+b_2\leq 2b_1+2b_2\leq 2b_1+b_2+b_3$

$\Leftrightarrow\ b_1\leq b_2\leq b_3$

이므로

$a_3+a_4=22,\ 2a_1+a_2\leq 2a_2\leq a_3+a_1$

을 만족시키는 경우의 수는

$2b_1+2b_2+2b_3+b_4=22$, $b_1\leq b_2\leq b_3$ 의 모든 순서쌍 $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$ 의 개수를 구하는 것과 같다. 이때, b_n 은 자연수 이므로 b_4 는 짝수가 되어야 한다. 그러므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각하자.

1) $b_4=2$ 인 경우

$2b_1+2b_2+2b_3+2=22$

$\Leftrightarrow\ b_1+b_2+b_3=10,\ b_1\leq b_2\leq b_3$

을 만족시켜야 하므로

자연수 10을 6이하의 세 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하는 것과 같다.

$$\begin{aligned}b_1+b_2+b_3=10&=1+3+6\\&=1+4+5\\&=2+2+6\\&=2+3+5\\&=2+4+4\\&=3+3+4\end{aligned}$$

이므로 6(가지)이다.

2) $b_4=4$ 인 경우

$2b_1+2b_2+2b_3+4=22$

$\Leftrightarrow\ b_1+b_2+b_3=9,\ b_1\leq b_2\leq b_3$

을 만족시켜야 하므로 자연수 9를 6이하의 세 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하는 것과 같다.

$$\begin{aligned}b_1+b_2+b_3=9&=1+2+6\\&=1+3+5\\&=1+4+4\\&=2+2+5\\&=2+3+4\\&=3+3+3\end{aligned}$$

이므로 6(가지)이다.

3) $b_4=6$ 인 경우

$2b_1+2b_2+2b_3+6=22$

$\Leftrightarrow\ b_1+b_2+b_3=8,\ b_1\leq b_2\leq b_3$

을 만족시켜야 하므로 자연수 8을 6이하의 세 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하는 것과 같다.

$$\begin{aligned}b_1+b_2+b_3=8&=1+1+6\\&=1+2+5\\&=1+3+4\\&=2+2+4\\&=2+3+3\end{aligned}$$

이므로 5(가지)이다.

그러므로

$a_3+a_4=22$, $2a_1+a_2\leq 2a_2\leq a_3+a_1$

을 만족시키는 경우의 수는 $6+6+5=17$(가지)이다.

30.

(나) 조건에 의하여 $f(x)=\ln(x^2+1)+C$

(단, C는 적분 상수이다.)

이때, 함수 $f(x)$는 미분가능하므로 연속이다

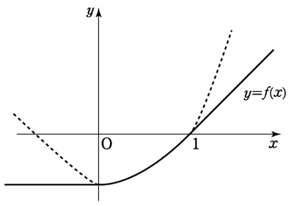
따라서 $f(1)=\ln 2+C=0$ 이다.

$\Rightarrow\ C=-\ln 2$

한편, (다) 조건에 의하여 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x)\geq 0$ 임을 알 수 있다.

즉, 아래로 볼록이거나 직선이다.

구간 $(0,\ 1)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프는 결정되어 있는데, $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ 의 값이 최소가 되기 위해서는 함수 $f(x)$가 각각 구간 $(-\infty,\ 0)$과 구간 $(1,\ \infty)$ 에서 직선이 되어야 한다.



$x=1$ 에서 기울기가 1이다.

따라서 $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ 가 최소가 되기 위해서는 직선이 되어야 한다.

즉,

$$f(x)=\begin{cases}-\ln 2 & (-\infty<x\leq 0)\\ \ln(x^2+1)-\ln 2 & (0<x<1)\\ x-1 & (1\leq x<\infty)\end{cases}$$

이 되어야 한다.

$\int_{-2}^{2}xf(x)dx$

$=-\ln 2\int_{-2}^{0}x\,dx$

$\quad+\int_{0}^{1}x\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$

$=2\ln 2+\int_{0}^{1}x\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx+\frac{5}{6}$

이다. 이 때, $\frac{x^2+1}{2}=t$ 라 치환하면, $x\,dx=dt$ 이다.

$\int_{0}^{1}x\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln t\,dt$

$=\Big[t\ln t-t\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$

이므로 $\int_{-2}^{2}xf(x)dx=\frac{5\ln 2}{2}+\frac{1}{3}$

$\therefore\ 60(p+q)=60\times\frac{17}{6}=170$

(나)형 해설

1.
$A \cap B = \{3\}$ 이므로
$a = 3$

2.
$(2^3)^{\frac{4}{3}} \times \frac{1}{2}\log_3 3 = 8$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4}{2^{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{2^n}}{2-\frac{1}{2^n}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

4.
$a_2 = a_1 - 1$ 이므로
$a_1 + a_2 = 7$ 일 때, $a_1 = 4$ 이다.
따라서 $a_5 = 0$

5.
$(4^a)^b = 3^b$, $ab = 2$ 이므로
$3^b = 16$

6.
주어진 식에 $n=1$ 을 대입하면
$a_2 = a_1 - 12$
$\therefore\ a_1 = 18$
주어진 식에 $n=2$ 를 대입하면
$a_3 = 2a_2 - 6$
$\therefore\ a_3 = 6$
주어진 식에 $n=3$ 을 대입하면
$a_4 = 3a_3 - 4$
$\therefore\ a_4 = 14$
따라서, $a_1 + a_4 = 32$

7.
$A \cup (B-A) = A \cup B$
$n(A \cup B) = 8$ 이므로
$n\left(A^C \cap B^C\right) = n(U) - n(A \cup B) = 4$

8.
$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b} = \frac{2\times 2^{\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}+1}+\frac{2}{2^{\sqrt{3}}+1}$$
$$= \frac{2(2^{\sqrt{3}}+1)}{2^{\sqrt{3}}+1}$$
$\therefore\ \frac{2}{a}+\frac{2}{b} = 2$

9.
$f(x)$ 와 역함수의 교점은
$f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 두 교점은 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$
거리는 $\sqrt{2}$

10.
a_n 의 공비를 r 이라 하면
$\frac{a_6}{a_4} = r^2$, $\frac{4a_6}{a_5} = 4r$

주어진 식에 대입하면
$r^2 - 4r = -4$ 이므로
$r = 2$
$\frac{a_5}{a_2} = r^3 = 8$

11.
$f(4) = f(5) = 2$
$f(6) = f(7) = 3$
$f(8) = f(9) = 4$
$f(10) = f(11) = 5$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이다.

12.
각각 대입하면
$\log_a x_1 = \log_a 2 + b$
$\log_a x_2 = \log_a 2 + 1.5b$

각각의 식에 6과 4를 곱해서 b 의 계수를 같게 한다.
$6\log_a x_1 = 6\log_a 2 + 6b$
$4\log_a x_2 = 4\log_a 2 + 6b$

양변을 빼면
$\log_a \frac{(x_1)^6}{(x_2)^4} = \log_a 2^2$
$\frac{(x_1)^6}{(x_2)^4} = 4$

13.
명제가 참이 되기 위해서는
$x^2 + y^2 \ge 16$ 의 범위가 $|x| + |y| \ge a$ 의 범위에 포함되어야 한다.
그러므로 원 $x^2 + y^2 = 16$ 이 직선 $x + y = a$ 에 접할 때, 실수 a 가 최솟값을 가진다.
즉, $x + y = a$ 와 원점 사이의 거리가 4일 때, 원에 접한다.
$\frac{a}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4$ 이 성립하므로 $a = 4\sqrt{2}$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$
$$= \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} + \cdots$$
$$= \left(-\frac{1}{a_1}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}$$

15.
ㄱ.
$\sum_{k=1}^{3} a_k = 15$, $\sum_{k=1}^{2} a_k = 18$
$a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k - \sum_{k=1}^{2} a_k = -3$

ㄴ.
$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - 8n + 30$
$\quad = (n-4)^2 + 14$
따라서, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 최솟값은 14

ㄷ.
ㄴ.에서
$\sum_{k=1}^{m} a_k = (m-4)^2 + 14$ 이고
$\sum_{k=1}^{8-m} a_k = (4-m)^2 + 14$ 이다.
따라서, 7 이하의 모든 자연수 m 에 대하여
$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{8-m} a_k$ 이다.

16..
조건 (나)에 의해,
$x^2 + ax + b$ 는 $x - 2$ 를 근으로 가진다.
$f(x) = x^2 + ax + b = (x-2)(x-k)$ 라고 하자.

조건 (가)에 의해
$k \le 6$
조건 (나)에 의해
$k \ge 6$
$\therefore\ k = 6$

따라서
$f(x) = x^2 - 8x + 12$
$a + b = 4$

17.

$b-2a=k$라고 하자.

k의 최댓값은 $y=2x+k$가 $f(x)$에 접할 때 생긴다.

두 근을 연립했을 때, 중근이 생기는 k값을 찾아보자.

$f(x)=2x+k$

식을 양변 제곱하여 정리하면

$4x^2+(4k-5)x+k^2-2k+2=0$

판정법에 의해

$(4k-5)^2-16(k^2-2k+2)=0$일 때 중근을 가진다.

$\therefore\ k=-\dfrac{7}{8}$

18.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n^2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{a_n+n^2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\sqrt{\frac{a_n}{n^2}+1}+1}$$

수렴하기 위해서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=k$의 값이 존재해야 한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\sqrt{\frac{a_n}{n^2}+1}+1}=\frac{k}{\sqrt{0+1}+1}=2$$

따라서 $k=4$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+b_n\right)=6$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$

19.

조건 (가)와 역함수 조건에 의해

$f(1)$, $f(2)$를 케이스 분류하면

$i)$ $f(1)=4,\ f(2)=6$

조건 (나)에 의해 $f(4)=6$

$\therefore$ 모순

$ii)$ $f(1)=6,\ f(2)=4$

조건 (나)에 의해 $f(4)=5$

따라서 $f(3)=8$

$f(3)+f^{-1}(4)=8+2=10$

20.

$\mathrm{A_1}\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$이고, $\mathrm{B_1}\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$이다.

따라서, $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}=3$

$\mathrm{A_2}\left(\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$이고, $\mathrm{B_2}\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}\right)$

따라서, $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}=\dfrac{3}{2}$

같은 방법으로

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A_3B_3}}}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A_4B_4}}}=\dfrac{3}{8}$, $\cdots$

를 구할 수 있다.

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A_nB_n}}}$는 첫째항이 3, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B_n}}}=6$$

21.

공차의 크기별로 케이스를 나누어 조건에 맞는 수열의 개수를 찾아보자.

$i)$공차가 1

$a_1=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11$까지 11개

$ii)$공차가 2

$a_1=-1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 7$까지 9개

$iii)$공차가 3

$a_1=-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 3$까지 6개

공차가 4보다 커지면 조건 (가)를 만족할 수 없다.

$\therefore$ 26개

공차가 음수 즉, -1, -2, -3일 때도 같은 개수만큼 수열이 생긴다.

답은 총 52개

22.

$(f\circ g)(10)=f(9)=19$

23.

$$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-3b_n)=2\sum_{n=1}^{10}a_n-3\sum_{n=1}^{10}b_n=25$$

24.

$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{k}{y}\right)=1+\dfrac{x}{y}k+\dfrac{y}{x}+k$

산술기하평균에 의해

$\dfrac{x}{y}k+\dfrac{y}{x}$의 최솟값은 $2\sqrt{k}$이다.

$1+2\sqrt{k}+k=16$에서 $\sqrt{k}=t$로 치환하면

$(t+5)(t-3)=0\ (\because\ t>0)$이다. $\therefore\ k=9$

25.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{4a_n-6(n-1)\}$의 값이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{4a_n-6(n-1)\}=0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4a_n}{n}-6\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}=0$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{n}=6$이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=p=\frac{3}{2}$

26.

$f(x)=3x^n-x^{n-1}$라 하면

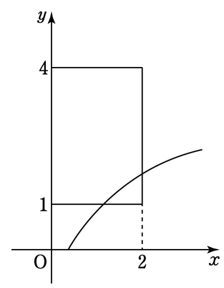
$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)=3\times2^n-2^{n-1}=a_n$

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}3\times2^k-2^{k-1}$$
$$=6(2^6-1)-(2^6-1)$$
$$=315$$

27.

$A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 상황은 다음 그림과 같다.



$A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 실수 a의 최솟값은 $y=\sqrt{x-a}$가 $(0,\ 4)$를 지날 때 생긴다.

$\therefore\ a=p=-16$

$A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 $y=\sqrt{x-a}$가 $(2,\ 1)$를 지날 때 생긴다.

$\therefore\ a=q=1$

$\therefore\ q-p=17$

28.

$(4^{0.2})^7=2^{\frac{14}{5}}$이다.

$2^{\frac{14}{5}}$가 어떤 자연수의 n제곱근이 되기 위해서는 n은 5의 배수여야 한다.

따라서 $f(k)$를 구하기 위해서는 k보다 같거나 작은 5의 배수의 숫자의 갯수를 찾으면 된다.

따라서, $f(10)=2$, $f(20)=4$, $\cdots$

$$\sum_{m=1}^{8}f(10m)=72$$

29.

a_n 이 등비수열이므로

$$\sum_{k=2n-1}^{\infty} a_k = \frac{a_{2n-1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times 10\times \frac{1}{3}^{2n-2} \text{ 이다.}$$

따라서,

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=3}^{\infty} a_k + \cdots + \sum_{k=2n-1}^{\infty} a_k$$
$$= 15 + 15\times\frac{1}{3^2} + \cdots + 15\times\frac{1}{3^{2n-2}}$$

이고

$\{b_n\}$ 은 첫째항이 15 고 공비가 $\frac{1}{9}$ 인 등비수열의 n번째 항까지의 합이다.

$$\therefore\ b_n = \frac{15\times\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}$$
$$= \frac{135}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{135}{8}$$

30.

n 의 값에 따라

$y = \left|n - \frac{2}{x}\right|$ 과 $y=20$ 의 위치관계를 살펴보자.

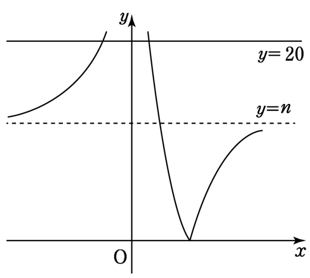
먼저 $\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{2}{x}\right)$ 는 $-\infty$ 로 발산하기 때문에

$y = \left|n - \frac{2}{x}\right|$ 와 $y=20$ 은

제 1사분면에서 ($x\to 0+$ 에서) 반드시 교점이 생김을 알 수 있다.

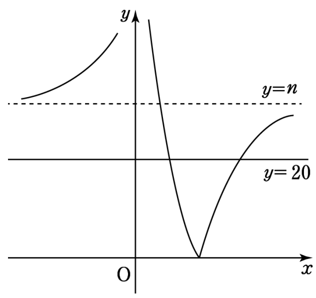
$x\to 0+$ 에서 생기는 교점 이외에
다른 교점을 살펴보자.

$i)$ $n<20$



그림과 같이 두 개의 교점이 생긴다.
점근선 $y=n$ 이 $y=20$ 보다 아래에 있기 때문에 제 2 사분면에서도 하나의 교점이 생기게 된다.

$ii)$ $n>20$



그림과 같이 두 개의 교점이 생긴다.
점근선 $y=n$ 이 $y=20$ 보다 위에 있기 때문에 제 1 사분면에서 하나의 교점이 더 생기게 된다.

$iii)$ $n=20$
점근선이 $y=20$ 이기 때문에 $x\to 0+$ 에서 유일하게 교점이 존재한다.

$\sum_{n=k}^{k+4} a_n = 9$ 가 성립하기 위해서
$a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ a_{k+4}$ 중 하나가 1이어야 한다.
즉, $k,\ k+1,\ k+2,\ k+3,\ k+4$ 중 하나가 20 이어야 한다. 즉, $k=16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$ 이다.

$\therefore$ 90