## 컵라면의 2012 수시 대비 논술예제

**[가]** 최단 강하곡선 문제/ Brachistochrone Problem

"중력을 받으면 구르는 공이 어떤 곡선을 따라 내려올 때 가장 빠를까?" 이 문제를 Brachistochrone Problem이라고 한다. 여기서 brachisto는 그리스 말로 가장 빠른, chrone은 시간 이라는 뜻의 영어 표기이다. 이 곡선이 바로 사이클로이드이고, 최단강하곡선 혹은 최속강하곡선이라고 한다. 이 문제는 1696년 뉴턴이 시도했고 바로 다음날 해결하였다. 또한 라이프니츠, 로피탈, 베르누이 형제 등에 의하여 이 문제의 답이 사이클로이드 곡선의 일부분임이 밝혀졌다. 이 문제는 어떤 특정한 조건을 만족하는 곡선의 개형을 구하는 문제라는 점에서 주어진 곡선을 해석하는 기존의 미적분학과는 차이점을 갖는다.

**[나]** $x-y$평면에서 주어진 어떤 연속인 곡선 $y=f(x)$가 있을 때, 이 곡선이 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$를 지난다고 하면 폐구간 $[x_1,x_2]$에서 이 곡선의 길이는 다음 식을 만족한다.

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

**[다]** 평면에서 두 점을 잇는 길이가 가장 짧은 곡선, 즉 두 점 사이의 최단 거리는 무엇일까? 이 질문에 대한 답은 직선이라는 것이 자명하게 떠오른다. 그러나 이것에 대한 증명은 쉽지 않다. 왜냐 하면 두 점 사이의 곡선의 길이를 $L$이라 하면 $L$을 최소로 만드는 $y$를 구하는 문제이기 때문이다. 무한한 개수의 $y$에 대하여 $L$을 구할 수 없기 때문에 통제할 수 있는 변수를 도입하여 문제에 접근해야 한다.

**[라]** 편미분이란 여러 변수로 이루어진 함수에서 어떤 하나의 변수만을 변하는 값, 나머지 변수를 상수로 생각하고 미분하는 것을 뜻한다. 편미분의 기하학적 의미는 $n$차원 공간의 함수에서 하나의 축만 따라 이동하면서 변화율을 측정한 것을 말한다. 예를 들어, $F(x,y,z)=3xyz$이면, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=3xz$ 이다.

### 1.

다음과 같은 절차를 통하여 $x-y$ 평면 위에서 주어진 서로 다른 두 점 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 을 최단 거리로 잇는 곡선을 구하려고 한다. 각각의 문제에 답하시오.

**(1)** 문제의 조건을 만족하는 곡선을 $y(x)$라고 하자. 두 점 $P$, $Q$ 를 지나는 곡선 중 이 곡선이 아닌 다른 임의의 곡선을 $Y(x)$라 하면 $Y(x)=y(x)+\epsilon\eta(x)$ 와 같이 나타낼 수 있다. $\eta(x)$와 $\epsilon$의 의미에 관해 설명하고 $\eta(x)$가 만족해야 하는 조건에 관해 논하시오. [15점]

**(2)** 임의의 곡선 $Y(x)$가 $P$, $Q$ 를 잇는 길이를 $L$이라고 할 때, $L$의 최솟값이 $P$, $Q$ 를 잇는 최단 거리이다. $L$을 $y$와 $\epsilon$에 관한 함수로 나타내고 $L$ 이 최소일 조건을 구하시오. [35점]

**(3)** (1), (2)를 이용하여 평면상의 두 점을 잇는 최단 거리 곡선은 직선임을 보이시오. [30점]

### 2.

오일러는 위 논의를 임의의 적분값 $I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ 에 대해 전개해 나간 결과 $[x_1,x_2]$에서 $I$ 가 최소가 되려면 다음과 같은 식을 만족해야 함을 보였다. 이를 Euler equation 이라고 한다.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

위 식을 이용하여 $[x_1,x_2]$에서 적분값 $\int_{x_1}^{x_2}y'^2+\sqrt{y}\,dx$가 최소가 되도록 하는 $y(x)$를 구하시오. [20점]