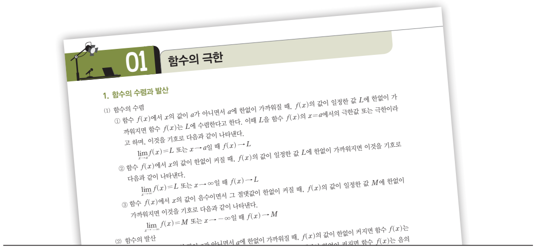
수능특강

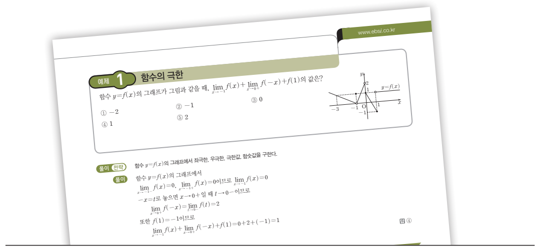
수학영역 **수학Ⅱ**

이 책의 차례 Contents



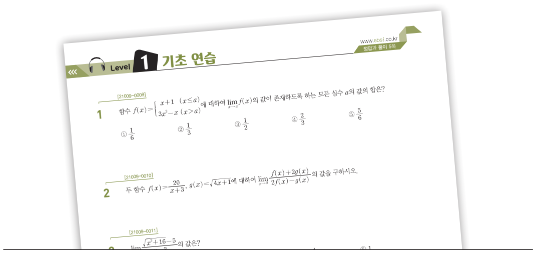
개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.



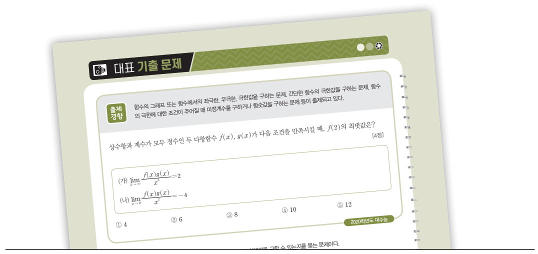
예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



Level 1－Level 2－Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

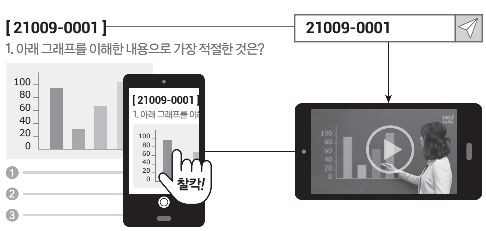


대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

학생 EBS 교재 문제 검색

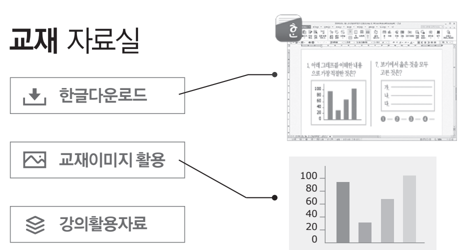
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

01 함수의 극한

1. 함수의 수렴과 발산

(1) 함수의 수렴

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x)=L$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to \infty} f(x)=L$ 또는 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to L$

③ 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)=M$ 또는 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to M$

(2) 함수의 발산

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 한다. 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x)=\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$, $\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

2. 함수의 우극한과 좌극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a+} f(x)=L$ 또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to L$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a-} f(x)=M$ 또는 $x \to a-$일 때 $f(x) \to M$

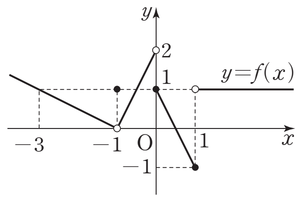
(3) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하면서 그 값이 L로 서로 같으면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

$\lim_{x \to a+} f(x)=\lim_{x \to a-} f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=L$

참고 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

예제 1 함수의 극한

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(-x)+f(1)$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 좌극한, 우극한, 극한값, 함숫값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

$-x=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(-x)=\lim_{t\to 0-} f(t)=2$$

또한 $f(1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(-x)+f(1)=0+2+(-1)=1$$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

[21009-0001]

유제 1 함수 $f(x)=\begin{cases} ax-3 & (x<2) \\ -x+a & (x\ge 2)\end{cases}$에 대하여 $3\lim_{x\to 2-} f(x)-4\lim_{x\to 2+} f(x)=2$일 때, 상수 a의 값은?

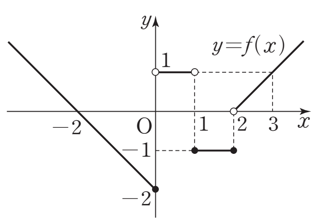
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0002]

유제 2 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{x\to 0-} |f(x)|+\lim_{x\to 1} |f(x)|+|f(2)|$$

의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

3. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x)=c\lim_{x \to a} f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x)\times\lim_{x \to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

예 ① $\lim_{x \to 2}(x^2-3x)=\lim_{x \to 2} x^2-\lim_{x \to 2} 3x=\lim_{x \to 2} x\times\lim_{x \to 2} x-3\lim_{x \to 2} x=2\times2-3\times2=-2$

② $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x+4}{1-x}=\dfrac{\lim_{x \to -1}(2x+4)}{\lim_{x \to -1}(1-x)}=\dfrac{2\lim_{x \to -1} x+\lim_{x \to -1} 4}{\lim_{x \to -1} 1-\lim_{x \to -1} x}=\dfrac{2\times(-1)+4}{1-(-1)}=1$

참고 (1) 함수의 극한에 대한 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$인 경우에도 성립한다.

(2) 함수의 극한에 대한 성질은 각 함수의 극한값이 모두 존재할 때에만 성립한다.

① $c=0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0} cf(x)=\lim_{x \to 0}\left(0\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} 0=0$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0} cf(x)=c\lim_{x \to 0} f(x)$가 성립하지 않는다.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0}\left\{\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x \to 0} 0=0$이지만

두 극한값 $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0} f(x)+\lim_{x \to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

③ $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0}\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} 1=1$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0} f(x)\times\lim_{x \to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

④ $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x \to 0} x^2=0$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}$가 성립하지 않는다.

예제 2 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)=12,\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{(2x-1)g(x)}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

풀이 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

풀이 $\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)=12$에서

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)f(x)}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{12}{2+2}=3$$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=2$이고 $\lim_{x\to 2}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to 2}f(x)=2\times 3=6$$

따라서

$$\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{(2x-1)g(x)}=\frac{\lim_{x\to 2}f(x)\times\lim_{x\to 2}f(x)-2\lim_{x\to 2}f(x)}{\lim_{x\to 2}(2x-1)\times\lim_{x\to 2}g(x)}=\frac{3\times 3-2\times 3}{3\times 6}=\frac{1}{6}$$

답 ①

정답과 풀이 4쪽

[21009-0003]

유제 3 두 함수 $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=x^2+x$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)g(x)}{4f(x)-3x}$의 값은?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

[21009-0004]

유제 4 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5f(x)}{x^2-3xg(x)}$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=8$　(나) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x(x-2)}=1$

4. 함수의 극한값의 계산

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$인 경우

① $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

② $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리식이면 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$인 경우

$f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

참고 $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$는 다음과 같다.

① (분자의 차수)<(분모의 차수)이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

② (분자의 차수)=(분모의 차수)이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$

③ (분자의 차수)>(분모의 차수)이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 또는 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

예 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2+4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{3+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}$

(3) $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$인 경우

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.

② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 분모가 1인 분수 꼴의 식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

예 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

(4) $0\times\infty$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)$에서 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\infty$인 경우는 식을 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{c}{\infty}$ (c는 상수)의 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

예 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{x^2-2}+1\right)\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x^2}\times\frac{2+(x^2-2)}{x^2-2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2-2}=\frac{1}{0^2-2}=-\frac{1}{2}$

예제 3 함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}$의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

풀이 전략 분모, 분자가 다항식일 때

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 분모, 분자를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

풀이

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+5)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+5}{x}=\frac{2+5}{1}=7$$

한편, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{2+0-0}{1-0}=2$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}=7+2=9$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[21009-0005]

유제 5 $\lim_{x\to-1}\frac{1-\sqrt{3x^2-2}}{x^3+1}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[21009-0006]

유제 6 $\lim_{x\to2}\frac{x^2}{x^2-4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

5. 미정계수의 결정

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)이고

① $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이다.

② $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이고 $\alpha \neq 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다.

설명 ① $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$$

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$이다.

이때 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$$

예 ① $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 - 3x}{x - 1} = 3$ (a는 상수)이면 $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$이므로

$\lim_{x \to 1} (ax^2 - 3x) = a - 3 = 0$이어야 한다. 따라서 $a = 3$이다.

② $\lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{x^2 + ax + 2} = 2$ (a는 상수)이면 $\lim_{x \to 2} (2x - 4) = 4 - 4 = 0$이고 $2 \neq 0$이므로

$\lim_{x \to 2} (x^2 + ax + 2) = 4 + 2a + 2 = 0$이어야 한다. 따라서 $a = -3$이다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면

($f(x)$의 차수)$=$($g(x)$의 차수)이고 $\alpha = \frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

예 $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^3 - x}{2x^3 + 3} = 3$ (a는 상수)이면 $\frac{a}{2} = 3$에서 $a = 6$이다.

6. 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x) \leq g(x)$이면 $\alpha \leq \beta$이다.

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

예제 4 미정계수의 결정

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-3}{x-2}=\frac{5}{6}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고 $x\to a$일 때 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이어야 한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-3}{x-2}=\frac{5}{6}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+ax+b}-3)=\sqrt{4+2a+b}-3=0$에서 $4+2a+b=9$, $b=-2a+5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-3}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax-2a+5}-3}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+ax-2a+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+ax-2a+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+ax-2a+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{\sqrt{x^2+ax-2a+5}+3}\\&=\frac{a+4}{\sqrt{9}+3}=\frac{a+4}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a+4=5$에서 $a=1$이고, $b=-2a+5=-2+5=3$이므로

$a+b=1+3=4$

답 ②

정답과 풀이 5쪽

유제 7 [21009-0007]

$\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x^2-x+b}=3$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

유제 8 [21009-0008]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$2x^3-3\le(x+1)f(x)\le 2x^3+1$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4x^2}{3x^2-x}$의 값을 구하시오.

[21009-0009]

1 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le a) \\ 3x^2-x & (x>a) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[21009-0010]

2 두 함수 $f(x)=\frac{20}{x+3}$, $g(x)=\sqrt{4x+1}$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오.

[21009-0011]

3 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

[21009-0012]

4 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{2x^2+ax+4}=b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $b\neq 0$이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[21009-0013]

5 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x+1}=3,\ \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{f(x)}=2$$

일 때, $f(-1)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[21009-0014]

1 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+4a & (x\le 0) \\ 2x+3 & (x>0) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)\{f(-x)+a\}$$

라 하자. $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값이 존재하도록 하는 양수 a의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[21009-0015]

2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a} g(x)$의 값이 존재한다.
ㄷ. $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\infty$이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21009-0016]

3 0이 아닌 실수 a에 대하여 $f(a)$를

$$f(a)=\lim_{x\to a} \frac{x^2-3x-a^2+3a}{x^2+ax-2a^2}$$

라 하자. $1\le a\le 3$에서 함수 $f(a)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[21009-0017]

4 $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-2x+13}{(x+3)(x-a)}=b$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[21009-0018]

5 $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+ax}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x}=\dfrac{1}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

[21009-0019]

6 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\sqrt{4x^2-2x+1} \le f(x) \le \sqrt{4x^2-2x+5}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty}\{2x-f(x)\}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[21009-0020]

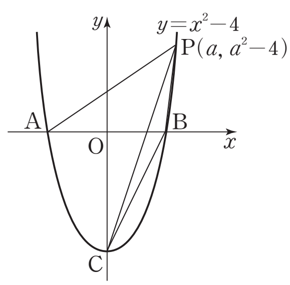
7 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(2x)+8x^3}{4x^2+1}=3,\ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2+2x}=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[21009-0021]

8 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4$가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, y축과 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2-4)$ $(a>2)$에 대하여 삼각형 PAB와 삼각형 PCB의 넓이를 각각 $S(a)$, $T(a)$라 할 때, $\lim_{a \to 2+} \dfrac{S(a)}{T(a)}$의 값은? (단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)



① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[21009-0022]

1 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & (x<2,\ x\neq 1) \\ 3 & (x=1) \\ x^2+x & (x\geq 2) \end{cases}$$

와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x+1)}=2$
(나) $\lim_{x\to -1+} f(1-x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x+1)g(x)$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0023]

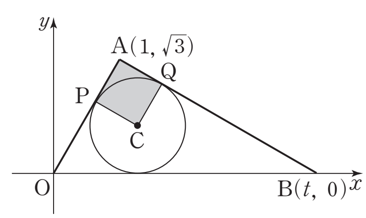
2 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값이 존재한다.
(나) 삼차다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$, 나머지가 4일 때, $\lim_{x\to 2}\dfrac{\{f(x)-4\}g(x)}{x^2-4}=4$이다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21009-0024]

3 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(1, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(t, 0)$ $(t>0)$이 있다. 삼각형 AOB에 내접하는 원의 중심을 C라 하고, 이 원과 두 변 AO, AB가 접하는 점을 각각 P, Q라 하자. 사각형 APCQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty} S(t)$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

출제 경향 함수의 그래프 또는 함수에서의 좌극한, 우극한, 극한값을 구하는 문제, 간단한 함수의 극한값을 구하는 문제, 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2020학년도 대수능

출제 의도 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함숫값의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수이면 $f(x)g(x)$도 다항함수이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

$x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = \lim_{x \to 0} (2x^3+ax^2+bx+c) = c = 0$

즉, $f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx$이고

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3+ax^2+bx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(2x+a+\frac{b}{x}\right)$의 값이 존재하므로 $b=0$이다.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3+ax^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x+a) = a = -4$이므로

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(2)$의 값은

$f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$

일 때 최대가 된다.

따라서 구하는 $f(2)$의 최댓값은 $f(2)=2 \times 2^2=8$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구하거나 함수식을 구하는 문제, 방정식이나 도형과 관련된 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

2020학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함숫값의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 (i) $n=1$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시켜야 한다.

$f(x)-4x^3+3x^2$은 이차항의 계수가 6인 이차함수이므로 $f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=b=0$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+ax$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+3x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$에서 $a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로 $f(1)=4+3+4=11$

(ii) $n=2$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$를 만족시켜야 하므로

$f(x)=10x^3+cx^2$ (c는 상수)로 놓으면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{10x^3+cx^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(10x+c)=c$에서 $c=4$

따라서 $f(x)=10x^3+4x^2$이므로 $f(1)=10+4=14$

(iii) $n\geq 3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$를 만족시켜야 하므로

$f(x)=6x^{n+1}+dx^n$ (d는 상수)로 놓으면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^{n+1}+dx^n}{x^n}=\lim_{x\to 0}(6x+d)=d$에서 $d=4$

따라서 $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로 $f(1)=6+4=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

답 ③

02 함수의 연속

1. 함수의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$

(2) 함수의 불연속

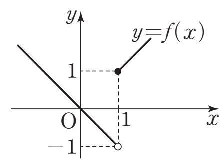
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

즉, 함수 $f(x)$가 (1)의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예 ① 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $f(1)=1$로 정의되어 있지만

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-} (-x)=-1$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+} x=1$이므로

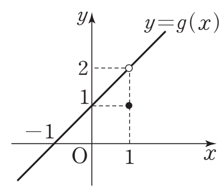
극한값 $\lim_{x \to 1} f(x)$가 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



② 함수 $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $g(1)=1$로 정의되어 있고,

$\lim_{x \to 1} g(x)=\lim_{x \to 1}(x+1)=2$로 극한값 $\lim_{x \to 1} g(x)$가 존재하지만 $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



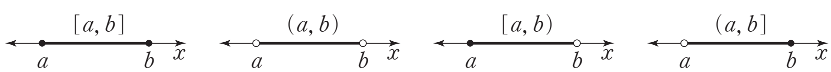
2. 구간

두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여

(1) 실수의 집합 $\{x|a \leq x \leq b\}$, $\{x|a<x<b\}$, $\{x|a \leq x<b\}$, $\{x|a<x \leq b\}$를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

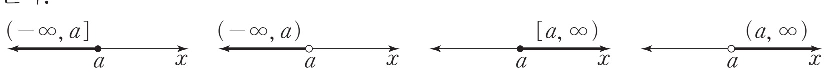
와 같이 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.



(2) 실수의 집합 $\{x|x \leq a\}$, $\{x|x<a\}$, $\{x|x \geq a\}$, $\{x|x>a\}$도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.



(3) 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

예제 1 함수의 연속

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-1} & (x\neq1) \\ b & (x=1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

풀이 전략 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다. 즉,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{1+a}-2=0$에서 $\sqrt{1+a}=2$, $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \\ &=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $ab=3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

답 ③

정답과 풀이 11쪽

[21009-0025]

유제 1 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq2) \\ a & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[21009-0026]

유제 2 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<a) \\ 4x+1 & (x\geq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

3. 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

(1) 열린구간에서의 연속: 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이라고 한다.

(2) 닫힌구간에서의 연속: 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이다. ② $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

4. 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

설명 함수의 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 연속함수의 성질이 성립함을 보일 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cf(a)$ (c는 상수)이므로 함수 $cf(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a)+g(a)$

$\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f(a)-g(a)$

이므로 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$ $(g(a) \neq 0)$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이다.

참고 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 함수

$$cf(x)\ (c\text{는 상수}),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x) \neq 0)$$

도 그 구간에서 연속이다.

② 함수 $y=x$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 상수함수도 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 모든 다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

예제 2 연속함수의 성질

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2a & (x<0) \\ -x+3 & (x\ge 0) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

풀이 전략 실수 a에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

풀이 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=f(a)f(0)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-}(-x+3)\{(x-a)+2a\}=(-a+3)\times 2a$$

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+}(-x+3)\{-(x-a)+3\}=(-a+3)\times 3$$

$$f(a)f(0)=(-a+3)\times 3$$

이므로 $(-a+3)\times 2a=(-a+3)\times 3$, $(-a+3)(2a-3)=0$

$$a=3 \text{ 또는 } a=\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ⑤

정답과 풀이 11쪽

[21009-0027]

유제 3 두 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<1) \\ 2x+1 & (x\ge 1) \end{cases}$, $g(x)=x^2+k$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0028]

유제 4 최고차항의 계수가 자연수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ 6 & (x=2) \\ f(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $\frac{1}{g(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 최댓값은?

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

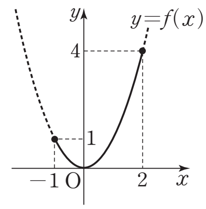
5. 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때

$f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=4$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.



참고 ① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 $x=0$에서 불연속인 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\le 0) \\ x-1 & (x>0) \end{cases}$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

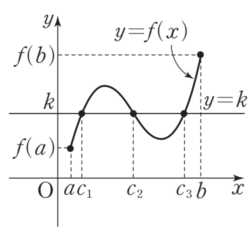
② 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b) 또는 구간 $[a, b)$ 또는 구간 $(a, b]$에서 연속인 경우에는 함수 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 열린구간 $(-1, 2)$ 또는 구간 $[-1, 2)$에서 연속이고 두 구간에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖지만 두 구간에서 최댓값을 갖지 않는다.

6. 사잇값의 정리

(1) 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



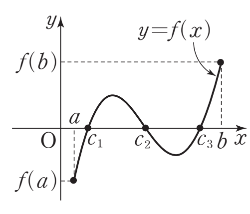
예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0)=0,\ f(2)=4$이므로 $f(c)=2$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(c)=c^2=2$에서 $0<\sqrt{2}<2$인 $c=\sqrt{2}$가 존재한다.

(2) 사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르므로 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값인 0에 대하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

예제 3 사잇값의 정리

두 함수 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<2) \\ x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^3-4x & (x<2) \\ 4x^2+8 & (x\geq 2) \end{cases}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=12$

ㄴ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. 방정식 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{7}{2}x$의 실근이 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

풀이 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{x^3-4x}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}x(x+2)=8$ (거짓)

ㄴ. ㄱ에서 $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=8$이고 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{4x^2+8}{x+1}=\frac{4\times 2^2+8}{3}=8$, $\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{4\times 2^2+8}{3}=8$

따라서 $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이고 구간 $[1, 2)$와 구간 $(2, 3]$에서 $f(x)\neq 0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이다. $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{7}{2}x$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고

$$h(1)=\frac{g(1)}{f(1)}-\frac{7}{2}\times 1=\frac{-3}{-1}-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}<0,\ h(3)=\frac{g(3)}{f(3)}-\frac{7}{2}\times 3=\frac{44}{4}-\frac{21}{2}=\frac{1}{2}>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$, 즉 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{7}{2}x$의 실근이 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답과 풀이 11쪽

유제 5

[21009-0029]

방정식 $x^3+x-12=0$은 오직 하나의 실근 α를 갖는다. 다음 열린구간 중에서 실수 α가 속하는 구간은?

① $(-1, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

[21009-0030]

1 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

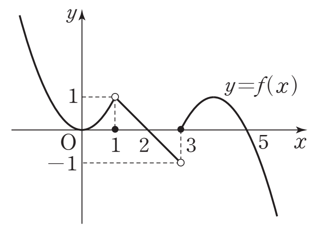
$$\lim_{x \to 3}\{3f(x)-2\}=6$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

[21009-0031]

2 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$가 $x=a$ $(0<a<5)$에서 불연속인 모든 실수 a의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[21009-0032]

3 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x<1) \\ x^2-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[21009-0033]

4 x에 대한 방정식 $x^2-6x+a=0$이 열린구간 $(0, 2)$에서 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21009-0034]

1 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

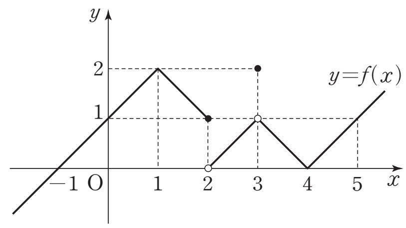
$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)f(x)}{x-1}=24$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[21009-0035]

2 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\sum_{k=1}^{5}\left\{f(k)-\lim_{x \to k-} f(x)\right\}$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[21009-0036]

3 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-2)f(x)=(x+a)|x-2|$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0037]

4 실수 x에 대하여 부등식 $m \le 4-2^{3-x} < m+1$을 만족시키는 정수 m의 값을 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 구간 (a, ∞)에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

[21009-0038]

5 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{9}{2}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $0\le x\le 2$일 때, $f(x)=\begin{cases} x+a & (0\le x<1) \\ x^2+bx & (1\le x\le 2) \end{cases}$이다.

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

[21009-0039]

6 함수 $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & (x<3) \\ x-3 & (x\ge 3) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x-3) & (x\ge a) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 3 이하의 실수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0040]

7 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1} & (x\ne 1) \\ 3 & (x=1) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[21009-0041]

8 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=kx$가 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $f(1)=4$, $f(2)=-1$

[21009-0042]

1 실수 t에 대하여 원 $(x-t)^2+y^2=4$가 두 직선 $3x+4y-8=0$, $4x-3y+6=0$과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 실수 a의 개수는?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

[21009-0043]

2 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{3-f(x)}{x-f(2)}=4$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

[21009-0044]

3 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x < -1) \\ -x-1 & (-1 \le x < 0) \\ x & (0 \le x \le 1) \\ -x+1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $-2<a<0$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} h(x)=h(a)$이다.
ㄷ. 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$가 $x=b\ (-2<b<2)$에서 불연속인 실수 b의 개수가 1이 되도록 하는 양수 k의 값이 존재한다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

출제 경향 함수의 연속의 정의를 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제, 함수의 그래프를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 연속 여부를 판단하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases},\ g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

2017학년도 대수능

출제 의도 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq 2$일 때, $f(x)=1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데 함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 불연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

이므로 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$, $2a+1=0$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$

답 ④

대표 기출 문제

출제 경향 함수의 연속의 정의를 이용하여 구간이 나누어진 함수의 함숫값을 구하는 문제, 실수 전체의 집합에서 함수가 연속이기 위한 조건을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이므로
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=a$에서 연속이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times(-1)=-3,\ \lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $a=0$일 때,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times 0=0,\ \lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $a>0$일 때,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times 0=0,\ \lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times 0=0,\ f(0)g(0)=2\times 0=0$$

에서 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a>0$이므로

$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=(-2a+2)\times 2a$$

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=(-2a+2)\times(2a-1)$$

$$f(a)g(a)=(-2a+2)\times(2a-1)$$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$이어야 하므로

$$(-2a+2)\times 2a=(-2a+2)\times(2a-1),\ 2a-2=0$$

따라서 $a=1$

답 ④

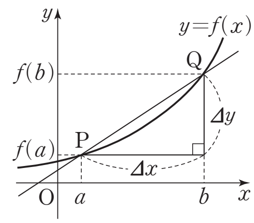
03 미분계수와 도함수

1. 평균변화율

(1) 평균변화율: 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 증분, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, 기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다. 또 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라고 한다.



(2) 평균변화율의 기하적 의미: 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예 함수 $f(x)=x^2+2x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{15-3}{2}=6$$

이고, 이 값은 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 두 점 $(1,\ 3)$, $(3,\ 15)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

2. 미분계수

(1) 미분계수: 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

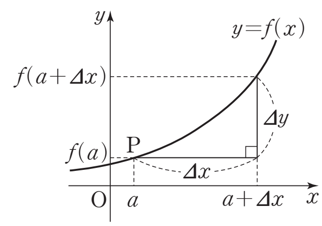
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

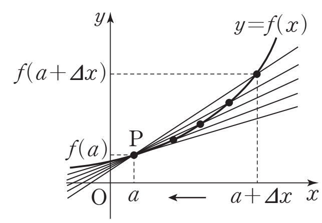
이다. 이때 $\Delta x \to 0$일 때의 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$





참고 위의 식에서 $a+\Delta x=x$라 하면 $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(2) 미분계수의 기하적 의미: 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예 함수 $f(x)=2x^2+3x$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(2x+5)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(2x+5)=7$$

이므로 곡선 $y=2x^2+3x$ 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 7이다.

예제 1 미분계수

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}=5$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-2}{3h}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

풀이 전략 다항함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}=5$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x^2)-2\}=0$이고 다항함수 $f(x^2)$은 연속함수이므로

$f(1)-2=0$에서 $f(1)=2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to 1}(x+1)\\&=f'(1)\times 2=5\end{aligned}$$

에서 $f'(1)=\frac{5}{2}$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-2}{3h}=\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}$

$$=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$$

답 ④

정답과 풀이 17쪽

[21009-0045]

유제 1 함수 $f(x)=x^2+ax$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이 $af'(1)$의 값과 같도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0046]

유제 2 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=2$, $f'(2)=3$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-x^2}{x-2}$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3. 미분가능과 연속

(1) 미분가능

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

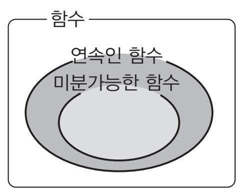
가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 미분가능한 함수

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

(3) 미분가능과 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.



참고 위의 명제의 대우는 참이다. 즉, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 항상 $x=a$에서 미분가능한 것은 아니다.

설명 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

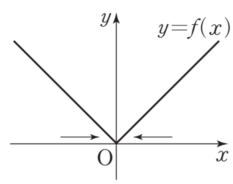
따라서

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)-f(a)\}+f(a)]=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)=f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

예 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이자.

(i) $x=0$에서의 연속성



$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}|x|=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0+}x=0$$

에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$이므로 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$

이므로 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이다. 따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

예제 2 미분가능과 연속

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax & (x<1) \\ bx^2+18x-5 & (x\geq 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $f(-2)+f(2)$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

풀이 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 (1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$

(2) $f'(a)$가 존재한다. 즉, $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

풀이 (i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x^2+ax)=2+a,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(bx^2+18x-5)=b+13,\ f(1)=b+13$$

이므로 $2+a=b+13$, $a=b+11$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이다.

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(2x^2+ax)-(b+13)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{2x^2+ax-(2+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(2x+2+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(2x+2+a)=4+a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(bx^2+18x-5)-(b+13)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{bx^2+18x-(b+18)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(bx+b+18)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(bx+b+18)=2b+18$$

이므로 $4+a=2b+18$

㉠에서 $4+(b+11)=2b+18$, $b=-3$, $a=-3+11=8$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+8x & (x<1) \\ -3x^2+18x-5 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로 $f(-2)+f(2)=(8-16)+(-12+36-5)=11$

답 11

정답과 풀이 18쪽

유제 3 [21009-0047]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & (x\leq 1) \\ a^2x & (x>1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

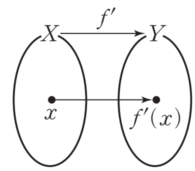
유제 4 [21009-0048]

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ f(x) & (0\leq x<2) \\ c & (x\geq 2) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(1)\times g(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

4. 도함수

(1) 도함수

함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 함수



$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

참고 ① $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

② 위의 식에서 $x+\Delta x=t$라 하면 $\Delta x \to 0$일 때 $t \to x$이므로

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t \to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

(2) 도함수와 미분계수

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$이다. 따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 함숫값이다.

예 함수 $f(x)=x^2-3x$의 도함수는

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{\{(x+h)^2-3(x+h)\}-(x^2-3x)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{(2x-3)h+h^2}{h}\\&=\lim_{h \to 0}(2x-3+h)=2x-3\end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$의 $x=4$에서의 미분계수는 $f'(4)=2\times4-3=5$

5. 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)와 상수함수의 도함수

(1) $y=x^n$ ($n\geq2$인 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

설명 함수 $y=x^n$ ($n\geq2$인 자연수)에서 $f(x)=x^n$으로 놓으면

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h \to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}\\&=\lim_{h \to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}\\&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{개}}=nx^{n-1}\end{aligned}$$

(2) $y=x$이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

예제 3 도함수

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(1)+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{f(1+h)-f(1)}=x^2+3x$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은? (단, $f'(1)\neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

풀이 전략 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다.

풀이

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{f(1+h)-f(1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times 2}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}$$

$$=\frac{2f'(x)}{f'(1)}$$

이므로 $f'(1)+\frac{2f'(x)}{f'(1)}=x^2+3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)+2=1+3$, $f'(1)=2$

㉠에서 $2+\frac{2f'(x)}{2}=x^2+3x$

따라서 $f'(x)=x^2+3x-2$이므로

$f'(3)=9+9-2=16$

답 ②

정답과 풀이 18쪽

[21009-0049]

유제 5 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x-2$일 때,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21009-0050]

유제 6 n이 자연수일 때, 두 함수 $f(x)=x^{2n}$, $g(x)=x^{n+2}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}f'(1)g'(1)$의 값을 구하시오.

6. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

설명 (2) $$\begin{aligned} y'&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &=f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \end{aligned}$$

예 ① $(2x^2-3x+5)'=2\times(x^2)'-3\times(x)'+(5)'=4x-3$

② $\{(x^2-1)(3x+2)\}'=(x^2-1)'(3x+2)+(x^2-1)(3x+2)'=2x(3x+2)+3(x^2-1)=9x^2+4x-3$

참고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때

① $y=f(x)g(x)h(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

② $y=\{f(x)\}^2$이면 $y'=2f(x)f'(x)$

③ 상수 a에 대하여 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(a)=0$, $f'(a)=0$이다.

설명 ① $$\begin{aligned} y'&=f'(x)\{g(x)h(x)\}+f(x)\{g(x)h(x)\}' \\ &=f'(x)g(x)h(x)+f(x)\{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\} \\ &=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

② $y'=\{f(x)\times f(x)\}'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

③ ($\Longrightarrow$) 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)=(x^2-2ax+a^2)Q(x)$ …… ㉠

$f'(x)=(2x-2a)Q(x)+(x^2-2ax+a^2)Q'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 $x=a$를 대입하면 $f(a)=0$, $f'(a)=0$

($\Longleftarrow$) 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q=(x^2-2ax+a^2)Q(x)+px+q$ …… ㉢

$f'(x)=(2x-2a)Q(x)+(x^2-2ax+a^2)Q'(x)+p=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$ …… ㉣

㉢, ㉣에 $x=a$를 대입하면 $f(a)=pa+q=0$, $f'(a)=p=0$

즉, $p=0$, $q=0$에서 $f(x)=(x-a)^2Q(x)$이므로 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어진다.

예제 4 미분법

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+2}{1-x^2}=1$을 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(2x^3-3x)f(x)$에 대하여 $g(-1)\times g'(-1)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

풀이 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때 $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다.

풀이 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+2}{1-x^2}=1$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x)+2\}=0$에서 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(-1)=-2$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-(-2)}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{1-x}\right\}=f'(-1)\times\frac{1}{2}$$

이므로 $f'(-1)\times\frac{1}{2}=1$에서 $f'(-1)=2$

함수 $g(x)=(2x^3-3x)f(x)$에서

$g'(x)=(6x^2-3)f(x)+(2x^3-3x)f'(x)$

따라서

$g(-1)=(-2+3)\times f(-1)=-2$

$g'(-1)=(6-3)\times f(-1)+(-2+3)\times f'(-1)=-6+2=-4$

이므로 $g(-1)\times g'(-1)=-2\times(-4)=8$

답 ④

정답과 풀이 19쪽

[21009-0051]

유제 7 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수와 $x=2a$에서의 미분계수의 합이 28일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0052]

유제 8 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+ax^2+2)$에 대하여 $f'(2)=2$일 때, $f'(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[21009-0053]

1 함수 $f(x)=x^3+x^2+1$에서 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0054]

2 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{f(x)-3}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[21009-0055]

3 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to -1} \frac{2f(x)-3}{x^2+x}=f(-1)$을 만족시킬 때, $f'(-1)$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21009-0056]

4 함수 $f(x)=|x-a|(2x-1)$이 $x=a$에서 미분가능할 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0057]

5 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x \le 3) \\ x^2-2x & (x>3) \end{cases}$이 $x=3$에서 미분가능할 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[21009-0058]

6 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=x^2f'(2)-6$을 만족시킬 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.

[21009-0059]

7 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+5$에 대하여 $f'(a)+f'(2)=19$일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0060]

8 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=0$, $f'(2)=5$일 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0061]

9 함수 $f(x)=(ax^2+1)(x^3+ax+1)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h}=2$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[21009-0062]

10 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=a$를 만족시킬 때, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $5x+b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0063]

1 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+2x^2}{f(x)-x}=3$을 만족시킬 때, $f'(0)$의 값은? (단, $f'(0) \neq 1$)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21009-0064]

2 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-2)f'(x)=3f(x)-2x^2+x$$

를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

[21009-0065]

3 함수 $f(x)=|x-2|$에 대하여 **보기**에서 $x=2$에서 미분가능한 함수만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $xf(x)$ ㄴ. $f(4-x)f(x)$ ㄷ. $f(x)f(-x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21009-0066]

4 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x \leq 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} af(x) & (x \leq 1) \\ (x^2+bx-3)f(x) & (x>1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0067]

5 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2-xy$$

를 만족시키고 $f'(2)=3$일 때, 함수 $f'(x)$의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[21009-0068]

6 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=6$
(나) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에서 x축에 접한다.

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0069]

7 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+f'(2)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=2x-1$의 세 실근은 각각 -1, 0, 2이다.
(나) 삼차다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -3이다.

[21009-0070]

8 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(ax^2-2ax+2)f(x)$라 하자.

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-f(1)}{x^3-1}=2$일 때, $a+f'(1)$의 값은? (단, $f(1) \neq 0$이고, a는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21009-0071]

1 함수 $f(x)=x^2-2x+2$와 a가 아닌 실수 t에 대하여 $g(t)$를 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 t까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라 하고, $g(a)=2a-2$라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

보기

ㄱ. $t>2-a$이면 $g(t)>0$이다.
ㄴ. $b>a$이고 $g(b)=0$이면 $b>1$이다.
ㄷ. $b\neq a$이고 $g(b)=f'(c)$이면 $c=\frac{a+b}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21009-0072]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\neq 0$일 때, $f(x)>0$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)-f(x)\leq 2x+3$이다.

$f(0)=0$, $g(0)=3$일 때, $g'(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[21009-0073]

3 두 함수 $f(x)=x-5$, $g(x)=x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a$에 대하여 함수 $f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0074]

4 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)-4}{x-3}=2,\ \lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)-2}{x-3}=-6$$

을 만족시킨다. $h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, $h'(3)$의 값을 구하시오.

[21009-0075]

5 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=3f(1)$

(나) $\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}=5f(1)$

$\frac{g'(1)}{f'(1)}$의 값은? (단, $f'(1)\neq0$)

① -4 ② -2 ③ -1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

[21009-0076]

6 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\begin{cases} x^2-4\leq f(x)\leq x-2 & (2-t<x<2) \\ x-2\leq f(x)\leq x^2-4 & (2<x<2+t) \end{cases}$$

를 만족시키는 양의 실수 t가 존재한다. $\lim_{x\to1}\{f'(0)-f'(x)\}$의 값이 짝수일 때, $f(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

대표 기출 문제

출제 경향 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 계산하는 문제, 미분가능과 연속의 관계를 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제, 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2018학년도 대수능

출제 의도 함수의 극한에 대한 성질과 곱의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$에서 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(2)=0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)\ (a\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다. 이때

$$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$$

이므로 $f'(2)=2+a$

한편,

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{\{f'(x)\}^2}\right]=\frac{1}{4}$$

에서

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$, $\lim_{x\to 2}\{f'(x)\}^2=\{f'(2)\}^2$이고 극한값이 존재한다.

즉, $f'(2)\neq 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=f'(2)\times\frac{1}{\{f'(2)\}^2}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2+a}$$

$\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$이므로

$$f(3)=2\times 1\times 5=10$$

답 ④

대표 기출 문제

출제 경향 미분계수의 정의를 이용하거나 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제, 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구한 후 여러 가지 값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

2015학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (나)의 부등식에 $x=1$을 대입하면 $0\le f(1)\le 0$이므로 $f(1)=0$

$x>1$일 때, $\dfrac{6x-6}{x-1}\le\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\dfrac{2x^3-2}{x-1}$에서

$$\lim_{x\to 1+}\frac{6x-6}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{6(x-1)}{x-1}=6,\ \lim_{x\to 1+}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=6$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$

따라서 다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(1)=6$

조건 (나)에 의하여 다항함수 $f(x)$는 일차함수 또는 이차함수 또는 삼차함수이다.

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(x)=x-3$이고, $f'(x)=1$

$f'(1)=1\ne 6$이므로 조건을 만족시키는 일차함수는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$ (a는 상수)로 놓으면 $f(1)=0$이므로 $a=2$

$f(x)=x^2+2x-3$, $f'(x)=2x+2$

$f'(1)=4\ne 6$이므로 조건을 만족시키는 이차함수는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+bx^2+cx-3$ (b, c는 상수)로 놓으면 $f(1)=0$이므로 $b+c=2$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2bx+c$에서 $f'(1)=6$이므로 $2b+c=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=1$이므로 $f(x)=x^3+x^2+x-3$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이므로 $f(3)=27+9+3-3=36$

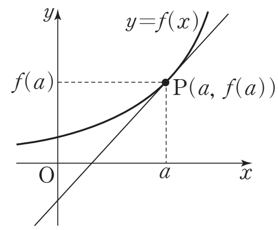
답 ①

04 도함수의 활용 (1)

1. 접선의 방정식

(1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

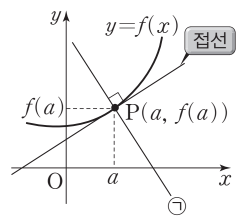
예 곡선 $y=2x^2$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=2x^2$이라 하면 $f'(x)=4x$이므로

곡선 $y=2x^2$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-2=4(x-1)$, 즉 $y=4x-2$

참고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선 ㉠의 방정식은 $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq0$)



(2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 방정식 $f'(a)=m$을 만족시키는 실수 a의 값을 구한다.

② 위의 ①에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=m(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

예 곡선 $y=x^2-x$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을 구해 보자.

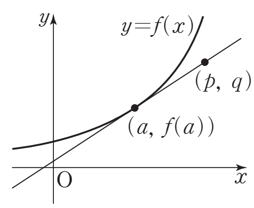
$f(x)=x^2-x$라 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(a)=2a-1=3$에서 $a=2$

따라서 기울기가 3인 접선의 접점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=3(x-2)$, 즉 $y=3x-4$

(3) 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 위에 있지 않은 점 $(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.



① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

② 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 구한다.

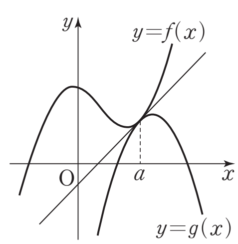
③ 점 $(p,\ q)$는 접선 위의 점이므로 위의 ②에서 구한 접선의 방정식에 대입하여 실수 a의 값을 구한다.

④ 위의 ③에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

참고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $x=a$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a,\ g(a))$에서의 접선이 서로 일치하므로 다음과 같은 조건을 이용하여 구한다.

① $x=a$에서의 함숫값이 같다. 즉, $f(a)=g(a)$

② $x=a$에서의 접선의 기울기가 같다. 즉, $f'(a)=g'(a)$



예제 1 접선의 방정식

곡선 $y=x^3-8x+4$에 접하고 기울기가 4인 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

풀이 전략 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은
① 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 방정식 $f'(a)=m$을 만족시키는 실수 a의 값을 구한다.
② 위의 ①에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=m(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-8x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-8$
기울기가 4인 접선의 접점의 좌표를 (a, a^3-8a+4)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-8=4$이므로
$a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$
(i) $a=-2$일 때,
접점의 좌표는 $(-2, 12)$이고, 접선의 방정식은
$y=4(x+2)+12$, 즉 $y=4x+20$
(ii) $a=2$일 때,
접점의 좌표는 $(2, -4)$이고, 접선의 방정식은
$y=4(x-2)-4$, 즉 $y=4x-12$
(i), (ii)에서 $\mathrm{A}(0, 20)$, $\mathrm{B}(0, -12)$ 또는 $\mathrm{A}(0, -12)$, $\mathrm{B}(0, 20)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=32$

답 ⑤

정답과 풀이 26쪽

유제 1

[21009-0077]
곡선 $y=2x^3-2x^2+a$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선이 점 $(0, 4)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

유제 2

[21009-0078]
다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=x^3+2x$ 위의 원점에서의 접선이 곡선 $y=x^2f(x)$와 점 $(1, f(1))$에서 접할 때, $f'(1)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

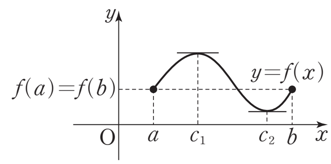
2. 평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

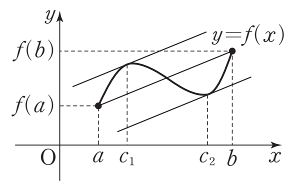


(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ 즉\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

참고 ① 평균값 정리는 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 직선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.
② 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.
③ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에서 $f'(x)=0$이면 평균값 정리에 의하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$는 상수함수임을 알 수 있다.

예 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구해 보자.
함수 $f(x)=x^2+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{5-1}{2}=2=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x$이므로 $f'(c)=2c=2$에서 $c=1$이고 $0<c<2$를 만족시킨다.

예제 2 평균값 정리

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $f(0)=3$
(나) $0<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 2$이다.

풀이 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

풀이 $0<t<4$인 실수 t에 대하여 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, t]$에서 연속이고 열린구간 $(0, t)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c_1)\ (0<c_1<t)$$

인 c_1이 존재한다.

조건 (가)에서 $f(0)=3$이고, 조건 (나)에서 $f'(x)\le 2$이므로 $\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\le 2$, 즉 $f(t)-3\le 2t$

$$f(t)\le 2t+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(t, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(t)}{4-t}=f'(c_2)\ (t<c_2<4)$$

인 c_2가 존재한다.

$f'(x)\le 2$이므로 $\frac{f(4)-f(t)}{4-t}\le 2$, 즉 $f(4)-f(t)\le 2(4-t)$

$$f(t)\ge 2t-8+f(4) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2t-8+f(4)\le 2t+3$, 즉 $f(4)\le 11$

따라서 $f(4)$의 최댓값은 11이다.

답 11

참고 $f(x)=2x+3$이면 조건 (가), (나)를 만족시키고 $f(4)=11$이다.

정답과 풀이 26쪽

유제 3

[21009-0079]

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 집합 S_f를 $S_f=\{c\,|\,f'(c)=0,\ c\text{는 실수}\}$라 할 때, $n(S_f)$의 최솟값은?

(가) $f(1)f(2)<0$　　(나) $f(2)f(3)<0$　　(다) $f(3)f(4)<0$

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

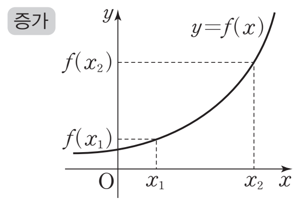
3. 함수의 증가와 감소

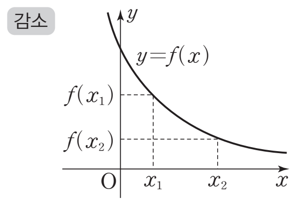
(1) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.





예 함수 $f(x)=x^2$에서 $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$$

즉, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

또 $x_1<x_2\le 0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$$

즉, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

설명 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이라 하자.

이 열린구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, 닫힌구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c)>0$이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)>0$이다.

즉, $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 이 열린구간에서 증가한다.

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이라 하면 ㉠에서 $f'(c)<0$이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)<0$이다.

따라서 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 이 열린구간에서 감소한다.

참고 ① 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

② 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수일 때,

㉠ $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

㉡ $f(x)$가 어떤 열린구간에서 감소하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

예제 3 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가하고 열린구간 $(-1, 2)$에서 감소하도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① $-\frac{11}{2}$　② $-\frac{13}{2}$　③ $-\frac{15}{2}$　④ $-\frac{17}{2}$　⑤ $-\frac{19}{2}$

풀이 전략 다항함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이면 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

풀이 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가하고 열린구간 $(-1, 2)$에서 감소하려면 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가져야 한다. 즉, $f'(-1)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=3-2a+b=0$이므로 $b=2a-3$　…… ㉠

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 2)$에서 감소하므로 $f'(2)\le 0$이어야 한다.

즉, $f'(2)=12+4a+b\le 0$　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $12+4a+(2a-3)\le 0$이므로 $a\le -\frac{3}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}a+b&=a+(2a-3)\\&=3a-3\\&\le 3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이므로 $a+b$의 최댓값은 $-\frac{15}{2}$이다.

답 ③

정답과 풀이 27쪽

[21009-0080]

유제 4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x$가 일대일대응이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[21009-0081]

유제 5 함수 $f(x)=3x^3-4|x-a|$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ 0　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

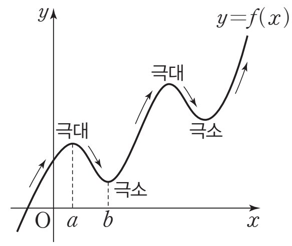
4. 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소

① 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \le f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.



② 함수 $f(x)$에서 $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \ge f(b)$$

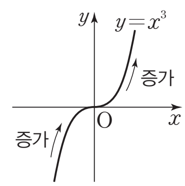
이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, 그때의 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(2) 극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

참고 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.
즉, $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 것은 아니다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(0)=0$이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.



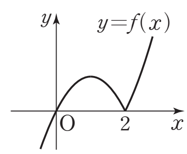
(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않더라도 $x=a$에서 극값을 가질 수 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=x|x-2|$는 $x=2$에서 미분가능하지 않지만 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.



5. 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 연속성, 그래프와 좌표축이 만나는 점 등을 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

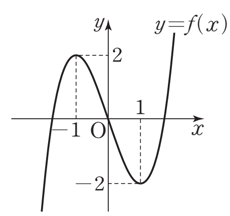
예 함수 $f(x)=x^3-3x$의 그래프를 그려 보자.

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.
또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



예제 4 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)=x^2\left(x^2-\frac{4}{3}x-4\right)+a$의 모든 극값의 합이 $-\frac{1}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

풀이 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서

$$f'(x)=4x^3-4x^2-8x=4x(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$$f(-1)=1+\frac{4}{3}-4+a=a-\frac{5}{3},\ f(0)=a,\ f(2)=16-\frac{32}{3}-16+a=a-\frac{32}{3}$$

이고, 모든 극값의 합이 $-\frac{1}{3}$이므로

$$f(-1)+f(0)+f(2)=\left(a-\frac{5}{3}\right)+a+\left(a-\frac{32}{3}\right)=3a-\frac{37}{3}$$

에서 $3a-\frac{37}{3}=-\frac{1}{3}$, $3a=12$

따라서 $a=4$

답 ④

정답과 풀이 27쪽

[21009-0082]

유제 6 함수 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$의 모든 극값의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

[21009-0083]

유제 7 함수 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+a$의 그래프가 x축에 접하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 21 ② 25 ③ 29 ④ 33 ⑤ 37

[21009-0084]

1 곡선 $y=x^4+3x+4$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0085]

2 곡선 $y=x^3-x^2+3$ 위의 점 $(1, 3)$을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 y절편은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0086]

3 구간 $(-\infty, k]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0087]

4 함수 $f(x)=x^3-12x$가 $x=a$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[21009-0088]

1 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=(x+1)f(x)$ 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선이 원점을 지날 때, $f'(1)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

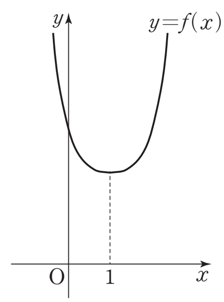
[21009-0089]

2 함수 $f(x)=x^3-6x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 $\mathrm{B}(b, f(b))$라 하자. $b-a=3$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, $a<0$)

① $3\sqrt{7}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ 9 ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $3\sqrt{11}$

[21009-0090]

3 함수 $f(x)=(x-1)^4+a$에 대하여 t에 대한 방정식 $f(t)-mt=0$을 만족시키는 양수 t가 존재하도록 하는 실수 m의 최솟값이 4일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 양의 상수이다.)



[21009-0091]

4 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax$가 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}>0$을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

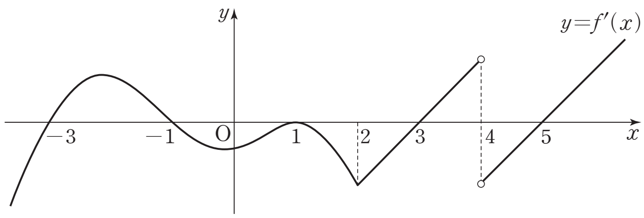
[21009-0092]

5 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-1)x+3$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$인 함수 $g(x)$가 존재한다.
(나) $f(1)=5$

[21009-0093]

6 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=a$ $(-3<a<5)$에서 극댓값을 갖는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[21009-0094]

7 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2f(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값 18을 가질 때, $f'(3)$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

[21009-0095]

8 두 양수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x^2 & (x<a)\\ -x+b & (x\geq a)\end{cases}$$

의 모든 극값의 합이 2일 때, $f(a-b)$의 값을 구하시오.

[21009-0096]

1 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x<0) \\ \frac{7}{3}x & (x\geq 0) \end{cases}$과 양의 실수 t에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x-t) & (x\geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21009-0097]

2 $f(1)=2$, $f(2)=0$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $g(a)=a$인 실수 a가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄴ. $g'(b)=0$인 실수 b가 열린구간 $(-2, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $g'(c)=2$인 실수 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21009-0098]

3 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?
(단, a는 상수이다.)

(가) 어떤 다항함수 $g(x)$와 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=(x^2-a)^3$이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$에서 직선 $y=-x+3$에 접한다.

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{32}{9}$ ③ $\frac{34}{9}$ ④ 4 ⑤ $\frac{38}{9}$

대표 기출 문제

출제 경향 곡선 위의 점 또는 접선의 기울기가 주어졌을 때 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 곡선 위에 있지 않은 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x\le k) \\ 12(x-k) & (x>k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2018학년도 대수능

출제 의도 미분가능을 이해하고 접선의 방정식을 이용하여 부등식에 관련된 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$에서 미분가능해야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{0-0}{x-a}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}=0$에서

$x\to a+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$, $(a-1)^2(2a+1)=0$, $a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=-\dfrac{1}{2}$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2=\frac{9}{2}\ne 0$

(ⅱ) $a=1$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.

$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$의 그래프와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m,\ f(m))$ $(m>1)$이라 하자.

$f(x)=(x-1)^2(2x+1)=2x^3-3x^2+1$이므로 $f'(x)=6x^2-6x$

$f'(m)=12$에서 $6m^2-6m=12$, $m^2-m-2=0$, $(m+1)(m-2)=0$

$m>1$에서 $m=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 12인 접선의 방정식은

$y-5=12(x-2)$, 즉 $y=12\left(x-\dfrac{19}{12}\right)$

따라서 $k\ge\dfrac{19}{12}$에서 k의 최솟값은 $\dfrac{19}{12}$이므로 $a+p+q=1+12+19=32$

답 32

대표 기출 문제

출제 경향 함수의 극댓값과 극솟값을 구하거나 극대, 극소를 이용하여 함수의 그래프에 관련된 내용을 묻는 문제 등이 출제되고 있다.

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 함수의 극대, 극소를 이용하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$이므로

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$f'(x)=0$에서

$3\{x^2-2ax+(a^2-1)\}=0$, $3(x-a+1)(x-a-1)=0$

$x=a-1$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-1$에서 극대이고 극댓값이 4이므로

$f(a-1)=4$에서

$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$

$a^3-3a-2=0$, $(a+1)^2(a-2)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때, $f(x)=x^3+3x^2$

$f(-2)=-8+12=4>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=2$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f(-2)=-8-24-18=-50<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

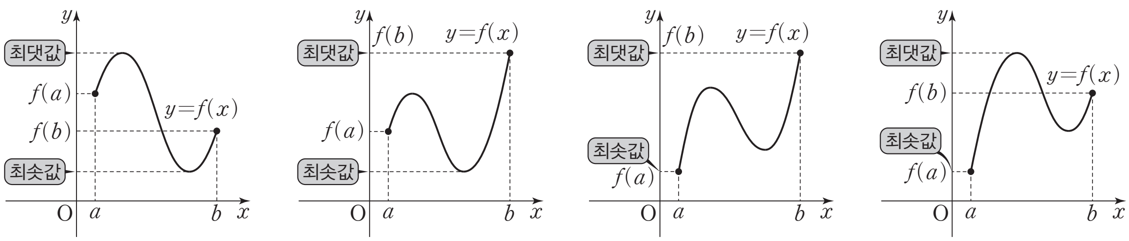
$f(-1)=-1+3=2$

답 ②

05 도함수의 활용 (2)

1. 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.



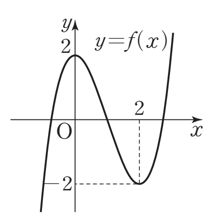
(2) 함수의 최대와 최소의 활용
도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.
① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 조사한다.
② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

2. 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.
① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
② 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수
함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
③ 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 서로 다른 실근의 개수
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

예 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.
$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



따라서 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

예제 1 함수의 최대와 최소

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a$의 최댓값이 14이고 최솟값이 m일 때, m의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

풀이 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

풀이 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a$에서

$$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+10$	↘	$a-\frac{7}{2}$	↗	$a+2$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $a+10$을 갖고, $x=1$에서 최솟값 $a-\frac{7}{2}$을 갖는다.

$a+10=14$에서 $a=4$이므로 $m=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

정답과 풀이 32쪽

유제 1 [21009-0099]

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+12$의 최댓값을 구하시오.

유제 2 [21009-0100]

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=3x^4-4x^3+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=18$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

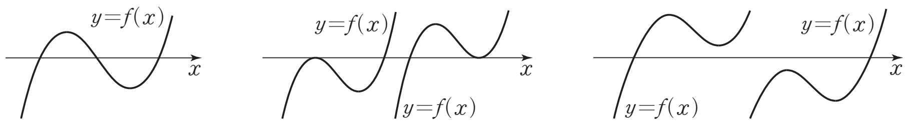
(2) 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)$\times$(극솟값)<0인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

② (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같이 x축과 접하고 다른 한 점을 지나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

③ (극댓값)$\times$(극솟값)>0인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같이 x축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

3. 부등식에의 활용

함수의 그래프를 이용하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명할 수 있다.
방정식에서와 마찬가지로 극대, 극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 찾으면 된다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식

① 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$의 증명: ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

② 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$의 증명: ($f(x)-g(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$ (k는 상수)의 증명: ($f(x)$의 최솟값)$\geq k$임을 보이거나 ($f(x)-k$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

(2) $x\geq a$에서 성립하는 부등식

① $x\geq a$에서 $f(x)>0$의 증명: $x\geq a$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 보인다.

② $x\geq a$에서 $f(x)<0$의 증명: $x\geq a$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0임을 보인다.

(3) 닫힌구간 $[a, b]$에서 성립하는 부등식

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$의 증명

① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)\geq 0$이면 $f(a)\geq 0$임을 보인다.

② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)\leq 0$이면 $f(b)\geq 0$임을 보인다.

③ 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$의 극값이 존재하면 극값을 고려하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하고 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

예제 2 방정식과 부등식에의 활용

$-2\le x\le\frac{9}{2}$에서 x에 대한 방정식 $\frac{1}{3}x^3-4x=a$가 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

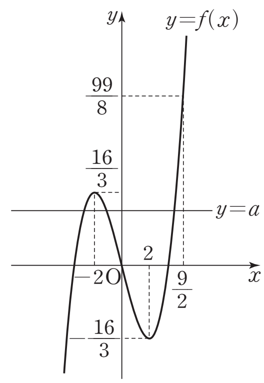
풀이 전략 x에 대한 방정식 $f(x)=a$ (a는 상수)가 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$라 하면 $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로

$-2\le x\le\frac{9}{2}$에서 방정식 $\frac{1}{3}x^3-4x=a$가 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 닫힌구간 $\left[-2, \frac{9}{2}\right]$에서 교점을 가져야 한다.

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{9}{2}\right)^3-4\times\frac{9}{2}=\frac{99}{8}$$

이므로 $-\frac{16}{3}\le a\le\frac{99}{8}$

따라서 모든 정수 a의 값은 -5, -4, -3, $\cdots$, 12이고, 그 개수는 18이다.

답 ④

정답과 풀이 32쪽

[21009-0101]

유제 3 두 함수 $f(x)=x^3-9x$, $g(x)=-3x^2+a$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[21009-0102]

유제 4 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-4x^3-12x^2+40>a$가 성립하도록 하는 모든 자연수 a의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

설명 점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치를 x라 하면 x는 t에 대한 함수이다. 이 함수를 $x=f(t)$라 하면 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 위치의 변화량 Δx는

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$

이다. 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균 속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

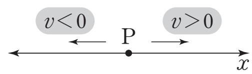
이고, 이것은 함수 $f(t)$의 평균변화율이다.

이때 점 P의 위치 $x=f(t)$의 시각 t에서의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라고 하며 보통 v로 나타낸다.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

참고 속도 v의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

$v>0$이면 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $v<0$이면 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



(2) 수직선 위를 움직이는 점의 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 v일 때, 점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a=\frac{dv}{dt}$$

설명 점 P의 속도 v도 시각 t에 대한 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 점 P의 시각 t에서의 속도의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라고 하며 보통 a로 나타낸다.

$$a=\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

예 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^3+4t$일 때,

점 P의 시각 t에서의 속도 v는 $v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+4$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는 $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도와 가속도는

$v=-3\times 1^2+4=1$, $a=-6\times 1=-6$

예제 3 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치 x가

$$x=t^3-3t^2-24t$$

이다. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각에서의 점 P의 가속도는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

풀이 전략 운동 방향이 바뀐다는 것은 속도의 부호가 변한다는 뜻이고 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-3t^2-24t$이므로 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t-24$$

운동 방향을 바꿀 때에는 속도의 부호가 바뀌므로 $v=0$인 시각은

$$3t^2-6t-24=0,\ 3(t+2)(t-4)=0$$

$t\geq0$이므로 $t=4$

$0<t<4$일 때 $v<0$이고, $t>4$일 때 $v>0$이므로 $t=4$일 때 운동 방향이 바뀐다.

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-6$$

이므로 $t=4$일 때 점 P의 가속도는

$$6\times4-6=18$$

답 ④

정답과 풀이 33쪽

[21009-0103]

유제 5 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치 x가

$$x=t^3-3t^2-5t$$

이다. 점 P의 속도가 4인 시각에서의 점 P의 가속도는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[21009-0104]

유제 6 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치가 각각

$$f(t)=t^3-3t^2+t,\ g(t)=2t^2-3t$$

이다. $t>0$일 때, 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각에서의 점 P의 속도는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0105]

1 함수 $f(x)=x^4-4x+8$의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[21009-0106]

2 삼차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $3f(x)=a$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합이 8일 때, 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[21009-0107]

3 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3-5x^2+3x+k>0$이 성립하도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21009-0108]

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=-2t^3+6t^2+9$$

이다. 점 P의 가속도가 0인 시각에서의 점 P의 속도는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21009-0109]

1 닫힌구간 $[0, 4]$에서 삼차함수

$$f(x)=ax^2(x-3)$$

의 최댓값이 6이고 최솟값이 정수일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

[21009-0110]

2 곡선 $y=x^4-\frac{3}{2}x^2-x+2$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{19}{8}$　② $\frac{21}{8}$　③ $\frac{23}{8}$　④ $\frac{25}{8}$　⑤ $\frac{27}{8}$

[21009-0111]

3 x에 대한 방정식 $x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a=0$이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[21009-0112]

4 x에 대한 방정식

$$|x^3-3x|=k^3-3k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[21009-0113]

5 실수 t에 대하여 직선 $y=2x+t$가 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{t \to a-} f(t) - \lim_{t \to a+} f(t) = 2$$

를 만족시키는 실수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

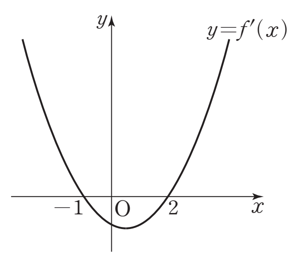
[21009-0114]

6 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $|x^3-3x^2+a|<18$이 성립하도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

[21009-0115]

7 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.
$x \le a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le f(-1)$이 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[21009-0116]

8 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x=-t^4+8t^3+6t$$

이다. 점 P의 가속도가 최대인 시각에서의 점 P의 속도를 구하시오.

[21009-0117]

1 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+1]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $g'(-2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

[21009-0118]

2 함수 $f(x)=x^4+ax^3+b$와 양수 c에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<c) \\ 8-f(x) & (x\geq c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

> 실수 k에 대하여 집합 S를
> $S=\{k\,|\,$함수 $|g(x)-k|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.$\}$
> 라 하면 집합 S의 원소의 개수는 2이고, 집합 S의 모든 원소의 합은 $\frac{25}{3}$이다.

① 7 ② $\frac{23}{3}$ ③ $\frac{25}{3}$ ④ 9 ⑤ $\frac{29}{3}$

[21009-0119]

3 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|(x+a)f(x)|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) $x>k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)>27$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 2이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

출제 경향 함수의 그래프를 이해하여 함수를 추론하는 문제가 출제된다. 또 방정식의 서로 다른 실근의 개수와 함수의 그래프의 교점의 개수의 관계를 이용하는 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

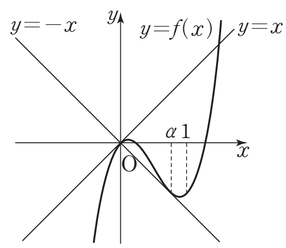
2020학년도 대수능

출제 의도 방정식의 실근의 개수와 함수의 그래프의 관계로부터 함수를 추론하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ($a>0$, a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고, $f'(1)=1$에서 $3a+2b+c=1$ …… ㉠

두 조건 (가), (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같이 직선 $y=x$와 원점에서 접하고, 직선 $y=-x$와 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$ $(0<\alpha<1)$에서 접한다.



$f'(0)=1$이므로 $c=1$이고, ㉠에서 $3a+2b=0$, 즉 $b=-\frac{3}{2}a$이므로

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x,\ f'(x)=3ax^2-3ax+1$$

$f(\alpha)=a\alpha^3-\frac{3}{2}a\alpha^2+\alpha=-\alpha$에서 $\alpha(2a\alpha^2-3a\alpha+4)=0$

$\alpha\neq0$이므로 $2a\alpha^2-3a\alpha+4=0$ …… ㉡

$f'(\alpha)=3a\alpha^2-3a\alpha+1=-1$에서 $3a\alpha^2-3a\alpha+2=0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a\alpha^2-2=0$, $a\alpha^2=2$ …… ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $4-3a\alpha+4=0$, $a\alpha=\frac{8}{3}$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $\frac{8}{3}\alpha=2$, $\alpha=\frac{3}{4}$

㉤에서 $\frac{3}{4}a=\frac{8}{3}$, $a=\frac{32}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{32}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+x$이므로

$$f(3)=96-48+3=51$$

답 51

대표 기출 문제

출제 경향 수직선 위를 움직이는 점의 위치가 시각 t의 함수로 주어질 때, 도함수를 활용하여 점의 속도, 가속도를 구하는 문제가 출제된다. 또한, 점의 운동 방향과 속도의 부호 사이의 관계를 이해하고 이를 활용하는 문제 등이 출제되고 있다.

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$$x_1=t^3-2t^2+3t,\ x_2=t^2+12t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

2020학년도 대수능

출제 의도 수직선 위를 움직이는 점의 위치가 주어질 때, 점의 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 위치 x_1이

$$x_1=t^3-2t^2+3t$$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v_1이라 하면

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-4t+3$$

점 Q의 시각 t에서의 위치 x_2가

$$x_2=t^2+12t$$

이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도를 v_2라 하면

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+12$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1=v_2$에서

$$3t^2-4t+3=2t+12$$

$$3t^2-6t-9=0,\ 3(t+1)(t-3)=0$$

$t>0$이므로 $t=3$

시각 $t=3$에서 점 P의 위치를 a라 하면

$$a=27-18+9=18$$

시각 $t=3$에서 점 Q의 위치를 b라 하면

$$b=9+36=45$$

따라서 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|b-a|=|45-18|=27$$

답 27

06 부정적분과 정적분

1. 부정적분의 정의

(1) 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 임의의 부정적분은

$F(x)+C$ (C는 상수)

와 같이 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

와 같이 나타낸다. 이때 상수 C를 적분상수라고 한다.

부정적분

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

미분

참고 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$

이므로

$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$

이때 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$G(x)-F(x)=C$ (C는 상수), 즉 $G(x)=F(x)+C$

2. 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)와 함수 $y=k$ (k는 상수)의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (C는 적분상수)

(2) k가 상수일 때, $\int k\,dx=kx+C$ (C는 적분상수)

3. 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 부정적분을 가질 때

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

설명 (2) 두 함수 $F(x)$, $G(x)$를 각각 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분이라 하면

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=\{F(x)+C_1\}+\{G(x)+C_2\}\ (C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$
$$=F(x)+G(x)+C_1+C_2$$

이고, $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C_3\ (C_3\text{은 적분상수})$$

이때 C_1, C_2, C_3은 모두 임의의 상수이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

예제 1 부정적분의 정의와 성질

두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 다항함수 $f(x)$의 부정적분이고, 다음 조건을 만족시킨다. $G(f(1))$의 값은?

(가) $F(x)=x^2-x$
(나) $F(2)+G(2)=8$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀이 전략 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면 $G(x)=F(x)+C$를 만족시키는 상수 C가 존재한다.

풀이 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 다항함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$$G(x)=F(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다. 조건 (가)에서

$$G(x)=x^2-x+C$$

조건 (나)에서

$$F(2)+G(2)=(4-2)+(4-2+C)=8,\ C=4$$

이므로 $G(x)=x^2-x+4$

따라서 $f(x)=F'(x)=2x-1$에서 $f(1)=2-1=1$이므로

$$G(f(1))=G(1)=1-1+4=4$$

답 ②

정답과 풀이 38쪽

[21009-0120]

유제 1 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int f(x)dx=4x^3+3x^2-2x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이다. 함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, $G(1)-G(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0121]

유제 2 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f'(x)=3x^2-12x+9$
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 7이다.

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4. 부정적분을 포함한 관계식

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$와 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)+g(x) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구해 보자.

$F'(x)=f(x)$이므로 등식 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+g'(x)$$

$$xf'(x)=-g'(x) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

등식 ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=-g'(0)$$

즉, $g'(0)=0$이므로 $g'(x)=xh(x)$ ($h(x)$는 다항함수)로 놓을 수 있다.

등식 ㉡에서

$$xf'(x)=-xh(x)$$

$f(x)$, $f'(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=-h(x)$

따라서 $f(x)=\int\{-h(x)\}dx$

참고 등식 $xf'(x)=-xh(x)$에서

(i) $x\neq0$일 때,

$$f'(x)=-h(x)$$

(ii) $x=0$일 때,

$f(x)$, $f'(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)$는 연속함수이다. 즉,

$$f'(0)=\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\{-h(x)\}$$

이고, $h(x)$는 연속함수이므로

$$\lim_{x\to0}h(x)=h(0)$$

따라서 $f'(0)=\lim_{x\to0}\{-h(x)\}=-h(0)$

(i), (ii)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-h(x)$이다.

예를 들어 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)=-x^4+2x^3$$

을 만족시키면 $f'(x)=-x^3+2x^2$이다.

예 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)+x^3 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구해 보자.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+3x^2$$

$$xf'(x)=-3x^2$$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)$도 다항함수이다.

따라서 $f'(x)=-3x$이므로 $f(x)=\int(-3x)dx=-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

예제 2 부정적분을 포함한 관계식

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)-x^4+x^2$$

을 만족시킨다. $F(1)=\frac{1}{3}$일 때, $f(-1)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

풀이 전략 함수 $F(x)$가 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분일 때, $F'(x)=f(x)$이므로 $F(x)$를 포함하는 관계식이 주어지면 그 관계식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $F(x)=xf(x)-x^4+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^3+2x$$

$$xf'(x)=4x^3-2x$$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)=4x^2-2$이다.

$$f(x)=\int(4x^2-2)dx=\frac{4}{3}x^3-2x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

이고, $F(1)=f(1)-1+1=\frac{1}{3}$에서 $f(1)=\frac{1}{3}$이므로

$$f(1)=\frac{4}{3}-2+C=\frac{1}{3},\ C=1$$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x+1$이므로

$$f(-1)=-\frac{4}{3}+2+1=\frac{5}{3}$$

답 ⑤

정답과 풀이 38쪽

유제 3 [21009-0122]

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+1)f(x)-x^4-4x$$

를 만족시킨다. $F(0)=3$일 때, $f(3)$의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

유제 4 [21009-0123]

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)+ax^3-10x^2$$

을 만족시킨다. $f(0)=2$, $f(1)=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 $F(x)$의 변화량 $F(b)-F(a)$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다. 또 $F(b)-F(a)$를 기호

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

로도 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다.

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

참고 ① 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분일 때,

$$F(x)=G(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

이므로

$$F(b)-F(a)=\{G(b)+C\}-\{G(a)+C\}=G(b)-G(a)$$

이다. 즉, $F(b)-F(a)$의 값은 $f(x)$의 부정적분을 어느 것으로 택하더라도 일정하다.

② 정적분의 정의에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 정적분의 값은 변하지 않는다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots$$

6. 정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \ (\text{단, } a<x<b)$$

설명 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $f(t)$의 a에서 x $(a<x<b)$까지의 정적분은

$$\int_a^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

이므로

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)-0=f(x)$$

참고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 상수 a에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

예 $\frac{d}{dx}\int_2^x (t^2+2t-1)dt=x^2+2x-1$

예제 3 정적분과 미분의 관계

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-1}^{x} f(t)dt=x^4+ax^2+bx$$

를 만족시킨다. $f(1)=11$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

풀이 전략 다항함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$, $\int_{a}^{a} f(t)dt=0$이다.

풀이 $\int_{-1}^{x} f(t)dt=x^4+ax^2+bx$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $0=1+a-b$

$a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3+2ax+b$

$f(1)=11$이므로 $4+2a+b=11$

$2a+b=7$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 $a+b=5$

답 ③

정답과 풀이 39쪽

[21009-0124]

유제 5 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{2}^{x} f(t)dt=ax+4+\int_{1}^{x}(3t^2-2t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{0}^{3} f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21009-0125]

유제 6 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x} f(t)dt=xf(x)+ax^2-10$$

을 만족시킨다. $f(1)=8$일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 정적분의 성질

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

설명 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하자.

① $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로 $kF(x)$는 함수 $kf(x)$의 한 부정적분이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx&=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)\\&=k\{F(b)-F(a)\}\\&=k\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

② $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로 $F(x)+G(x)$는 함수 $f(x)+g(x)$의 한 부정적분이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx&=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b\\&=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}\\&=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}\\&=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

예 $\int_1^3 (x^2-x)dx+\int_1^3 (2x^2+x)dx=\int_1^3 \{(x^2-x)+(2x^2+x)\}dx=\int_1^3 3x^2dx$

$$=\Big[x^3\Big]_1^3=27-1=26$$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx&=\Big[F(x)\Big]_a^c+\Big[F(x)\Big]_c^b\\&=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}\\&=F(b)-F(a)\\&=\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

예 $\int_0^2 x^2dx+\int_2^3 x^2dx=\int_0^3 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=9-0=9$

예제 4 정적분의 성질

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & (x<1) \\ 4 & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 $\int_0^3 |x-1|f(x)dx$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

풀이 전략 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

풀이 $|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & (x<1) \\ x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로

$$|x-1|f(x)=\begin{cases} -(x-1)(3x+1) & (x<1) \\ 4(x-1) & (x\geq 1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -3x^2+2x+1 & (x<1) \\ 4x-4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^3 |x-1|f(x)dx=\int_0^1 (-3x^2+2x+1)dx+\int_1^3 (4x-4)dx$$

$$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_0^1+\Big[2x^2-4x\Big]_1^3$$

$$=\{(-1+1+1)-0\}+\{(18-12)-(2-4)\}$$

$$=9$$

답 ④

정답과 풀이 39쪽

유제 7

[21009-0126]

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x<0) \\ -x+3 & (x\geq 0) \end{cases}$에 대하여 $\int_{-1}^3 f(x)\{x+f(x)\}dx$의 값은?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

유제 8

[21009-0127]

함수 $f(x)=x^3+ax^2+4$는 $x=2$에서 극솟값을 갖고,

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 (3x^2+b)dx=0$$

을 만족시킨다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

8. 다항함수의 성질을 이용한 정적분

(1) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때,

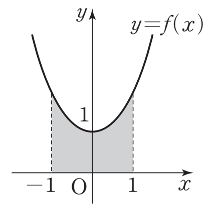
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

참고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
예를 들어, 함수 $f(x)=x^2+1$은

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$



(2) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때,

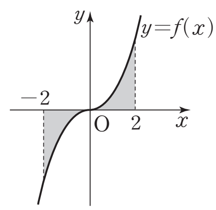
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

참고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
예를 들어, 함수 $f(x)=x^3+2x$는

$$f(-x)=(-x)^3+2\times(-x)=-x^3-2x=-f(x)$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-2}^{2}(x^3+2x)dx=0$$



9. 정적분으로 표시된 함수의 극한

함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속일 때

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(t)dt=f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(a)$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a)=f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

예 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1}^{1+h}(t^2+t)dt=1^2+1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t+3)dt=2+3=5$

예제 5 다항함수의 성질을 이용한 정적분

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.

$$\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)dx=8$$

이고 $f'(1)=18$일 때, $f(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀이 전략 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이다.

풀이 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=ax^3+bx$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3ax^2+b$이므로

$$\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)dx=\int_{-1}^{1}(3ax^4+bx^2)dx=2\int_{0}^{1}(3ax^4+bx^2)dx$$

$$=2\left[\frac{3}{5}ax^5+\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1=2\left(\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b\right)$$

즉, $2\left(\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b\right)=8$에서 $9a+5b=60$ …… ㉠

$f'(1)=18$이므로 $3a+b=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

따라서 $f(x)=5x^3+3x$이므로

$f(1)=5+3=8$

답 ④

정답과 풀이 40쪽

[21009-0128]

유제 9 $\int_{-2}^{2}(ax+b)dx=8$, $\int_{-2}^{2}(ax^2+bx+1)dx=20$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[21009-0129]

유제 10 사차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx+\frac{6}{5}$$

이고 $f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21009-0130]

1 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x-4$이다. $f(2)=0$일 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0131]

2 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int f(x)dx=x^3+3x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

일 때, $f'(2)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[21009-0132]

3 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)+x^4$$

을 만족시킨다. $f'(1)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

[21009-0133]

4 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)+ax^2$$

을 만족시킨다. $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[21009-0134]

5 $\int_0^2 (x^2+ax)dx=-\frac{4}{3}$, $\int_0^1 (ax+b)dx=6$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[21009-0135]

6 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 2x$$

를 만족시킨다. $f(a) > 0$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21009-0136]

7 $\int_0^2 (x+1)|x-1|dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0137]

8 $\int_0^2 (x^2+ax)dx = \int_0^2 (x^2+1)dx + 4$, $\int_0^1 bx^2 dx = 9 - \int_1^3 bx^2 dx$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[21009-0138]

9 $\int_{-a}^{a} (x^3+3x^2+3)dx = 8$일 때, 실수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0139]

10 함수 $f(x) = x^3 + 6x - 1$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x f(t)dt$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

Level 2 기본 연습

[21009-0140]

1 다항함수 $f(x)$에 대하여 $2xf(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 함수 $G(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$G(x)=x^2f(x)-2x^6+3x^5$$

을 만족시킨다. $G(1)=4$일 때, $f(2)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

[21009-0141]

2 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이고, 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_1^3 f(x)dx$의 값은?

(가) $G(0)=F(0)+2$
(나) $F(1)=2$, $G(3)=8$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21009-0142]

3 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$와 함수 $f(-x)$의 한 부정적분 $G(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. $f(1)$의 값은?

(가) $F(0)=G(0)=0$
(나) $F(1)-G(1)=3$
(다) $F(2)+G(2)=\frac{4}{3}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21009-0143]

4 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=3x^2+(2x-1)\int_0^2 f(x)dx$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[21009-0144]

5 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (3t^4+at^2+bt)dt=\int_1^x \{t+f(t)\}dt+3x^3+a$$

를 만족시킨다. $f(2)=20$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21009-0145]

6 함수 $f(x)=\begin{cases} a(x-1)^2 & (x<0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ a & (0\le x<2) \end{cases}$에 대하여 $\int_{-2}^{3} f(x)dx=26$일 때, $\int_0^a f(-x)dx$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① $\frac{43}{3}$ ② $\frac{46}{3}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ $\frac{52}{3}$ ⑤ $\frac{55}{3}$

[21009-0146]

7 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이면 $g(1)=2$이다.
ㄷ. $g(1)=0$이면 $\int_0^1 g(x)dx=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21009-0147]

8 두 함수 $f(x)=x^3+ax^2-4x$, $g(x)=x^3+2x^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)+g(x)+g(-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{1} \{xf'(x)+g'(x)\}dx=\frac{28}{3}$

$\int_{-1}^{1} \{f(x)+xg(x)\}dx$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ 2 ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

[21009-0148]

1 다항함수 $f(x)$와 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(1)=3$, $g(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+4+g'(x)$이다.
(다) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(p, 0)$ $(p\neq 0)$에서 x축에 접한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21009-0149]

2 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f'(t)\}dt=xf(x)+\frac{3}{4}x^4+ax^3+3x^2$이다.
(나) 함수 $|f(x)|$는 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 16을 갖는다. (단, $b>0$)

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

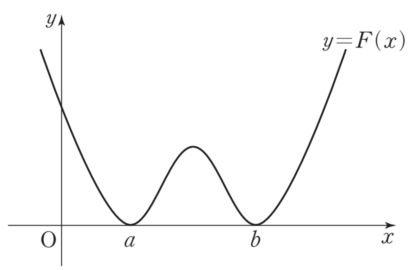
[21009-0150]

3 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$의 사차항의 계수는 1이고, 함수 $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$에서 x축에 접한다. $F(p)=32$일 때, 두 함수

$$S(x)=\int_p^x f(t)dt,\ T(x)=\int_p^x |f(t)|dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

(단, p는 상수이고, $0<a<3<b$이다.)



(가) 두 함수 $y=F(x)$, $y=|S(x)|$의 그래프의 한 교점 $(k, F(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같다.
(나) $S(3)+T(3)=S(5)+T(5)$

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

대표 기출 문제

출제 경향 정적분의 정의를 이용하여 식을 정리하고, 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수를 구하는 문제, 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산하는 문제 등이 출제되고 있다.

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}^2&=\{f(x)+g(x)\}^2-4f(x)g(x)\\&=(x^2+3x)^2-4(x^2+1)(3x-1)\\&=(x^4+6x^3+9x^2)-(12x^3-4x^2+12x-4)\\&=x^4-6x^3+13x^2-12x+4\\&=(x-1)^2(x-2)^2\end{aligned}$$

1	1	-6	13	-12	4
		1	-5	8	-4
1	1	-5	8	-4	0
		1	-4	4	
2	1	-4	4	0	
		2	-4		
	1	-2	0		

조건 (가)에서 $f(x)-g(x) \geq 0$이므로

$$f(x)-g(x)=|(x-1)(x-2)|=\begin{cases}x^2-3x+2 & (x<1 \text{ 또는 } x>2)\\ -x^2+3x-2 & (1 \leq x \leq 2)\end{cases}$$

조건 (나)에서 $f(x)+g(x)=x^2+3x$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}[\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}]=\begin{cases}x^2+1 & (x<1 \text{ 또는 } x>2)\\ 3x-1 & (1 \leq x \leq 2)\end{cases}$$

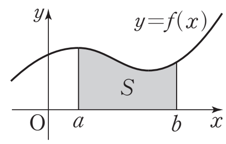
따라서

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x^2+1)dx+\int_1^2(3x-1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)+\left\{(6-2)-\left(\frac{3}{2}-1\right)\right\}=\frac{29}{6}$$

답 ③

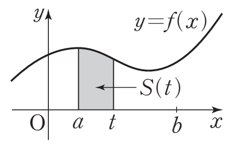
07 정적분의 활용

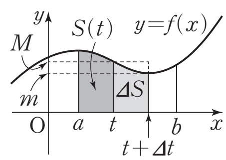
1. 곡선과 x축 사이의 넓이



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$





설명 (1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때,

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=t$ $(a\le t\le b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하고, x의 값이 t에서 $t+\varDelta t$까지 변할 때 $S(t)$의 증분을 $\varDelta S$라 하면 $\varDelta S=S(t+\varDelta t)-S(t)$이다.

$\varDelta t>0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t, t+\varDelta t]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$$m\varDelta t\le \varDelta S\le M\varDelta t,\ \text{즉 } m\le \frac{\varDelta S}{\varDelta t}\le M$$

이다. 여기서 $\varDelta t\to 0+$이면 $m\to f(t)$, $M\to f(t)$이므로

$$\lim_{\varDelta t\to 0+}\frac{\varDelta S}{\varDelta t}=f(t)$$

이다. 마찬가지로 $\varDelta t<0$일 때, $\displaystyle\lim_{\varDelta t\to 0-}\frac{\varDelta S}{\varDelta t}=f(t)$이다.

따라서 $S'(t)=f(t)$이므로 $S(t)$는 $f(t)$의 한 부정적분이다.

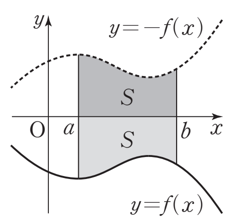
이때 $S(a)=0$이므로

$$\int_a^t f(x)dx=\Big[S(x)\Big]_a^t=S(t)-S(a)=S(t)$$

이다. 또 $t=b$일 때, $S(b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$이다.

그런데 $S(b)$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 S는 다음과 같다.

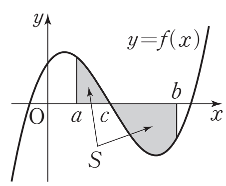
$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



(2) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,

곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=-f(x)$에 대하여 $-f(x)\ge 0$이므로 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



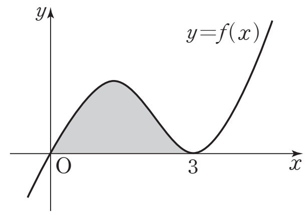
(3) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\ge 0$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,

$$\begin{aligned}S&=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx\\&=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx\\&=\int_a^b |f(x)|dx\end{aligned}$$

(1), (2), (3)에 의하여 $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

예제 1 곡선과 x축 사이의 넓이

삼차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나고 점 $(3,\ 0)$에서 x축에 접한다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 9일 때, 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

풀이 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

풀이 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나고 점 $(3,\ 0)$에서 x축에 접하므로

$f(x)=ax(x-3)^2$ ($a>0$, a는 상수)로 놓을 수 있다.

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)\ge 0$이고, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 9이므로

$$\int_0^3 ax(x-3)^2dx=9$$

$$\int_0^3 ax(x-3)^2dx=\int_0^3 (ax^3-6ax^2+9ax)dx=\left[\frac{a}{4}x^4-2ax^3+\frac{9a}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{81}{4}a-54a+\frac{81}{2}a=\frac{27}{4}a$$

즉, $\frac{27}{4}a=9$에서 $a=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x(x-3)^2=\frac{4}{3}x^3-8x^2+12x$, $f'(x)=4x^2-16x+12=4(x-1)(x-3)$이다.

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3 \{-f'(x)\}dx=\Big[-f(x)\Big]_1^3=f(1)-f(3)=f(1)=\frac{4}{3}-8+12=\frac{16}{3}$$

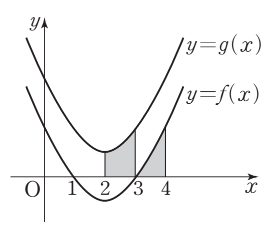
답 ④

정답과 풀이 46쪽

유제 1

[21009-0151]

함수 $f(x)=a(x-1)(x-3)$ $(0<a<2)$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{3}{2}$일 때, 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

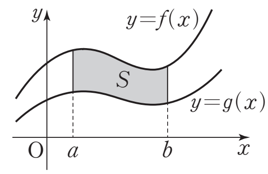
2. 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

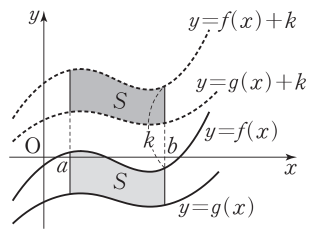
설명 (1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$일 때,

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



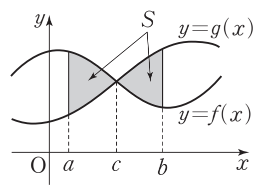
(2) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 $f(x)+k\ge g(x)+k\ge 0$이 되게 한다. 이때 넓이 S는 두 곡선 $y=f(x)+k$, $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



(3) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때,

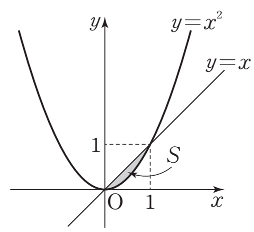
$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



(1), (2), (3)에 의하여 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

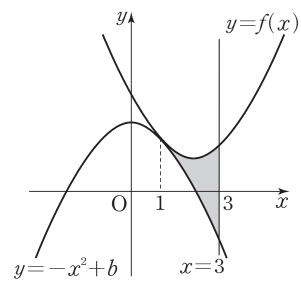
예 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.
곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는
$x^2=x$에서 $x(x-1)=0$, $x=0$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^2\le x$이므로

$$S=\int_0^1 |x^2-x|dx=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$



예제 2 두 곡선 사이의 넓이

함수 $f(x)=x^2+ax+6$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-x^2+b$는 점 $(1,\ f(1))$에서 만나고, 이 점에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-x^2+b$ 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.)



① 4　② $\frac{14}{3}$　③ $\frac{16}{3}$　④ 6　⑤ $\frac{20}{3}$

풀이 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

풀이 $g(x)=-x^2+b$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ f(1))$에서 만나므로
$f(1)=g(1)$, 즉 $1+a+6=-1+b$에서 $b=a+8$　　…… ㉠
이때 $f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x$이고,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로
$f'(1)=g'(1)$, 즉 $2+a=-2$, $a=-4$
㉠에서 $b=-4+8=4$
따라서 $f(x)=x^2-4x+6$, $g(x)=-x^2+4$이고, 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx=\int_1^3 \{(x^2-4x+6)-(-x^2+4)\}dx=\int_1^3 (2x^2-4x+2)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\right]_1^3=(18-18+6)-\left(\frac{2}{3}-2+2\right)$$
$$=\frac{16}{3}$$

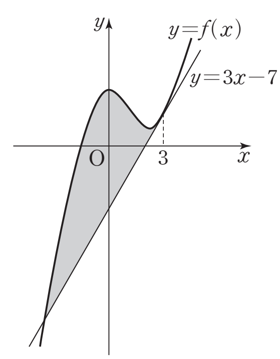
답 ③

정답과 풀이 46쪽

유제 2

[21009-0152]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-7$이 점 $(3,\ 2)$에서 접한다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-7$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.)

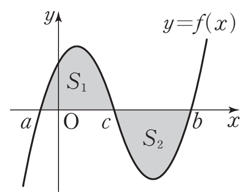


① 20　② 24　③ 28　④ 32　⑤ 36

3. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

(1) 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,



$S_1=S_2$이면 $\int_a^b f(x)dx=0$

설명 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq 0$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때,

$$S_1=\int_a^c f(x)dx,\ S_2=\int_c^b \{-f(x)\}dx=-\int_c^b f(x)dx$$

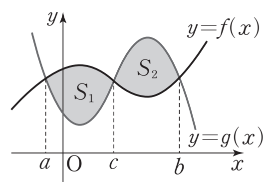
이때 $S_1=S_2$이면 $\int_a^c f(x)dx=-\int_c^b f(x)dx$이므로

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=0$$

따라서 $\int_a^b f(x)dx=0$

(2) 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,



$S_1=S_2$이면 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$

설명 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq g(x)$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq g(x)$일 때,

$$S_1=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx,\ S_2=\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx=-\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

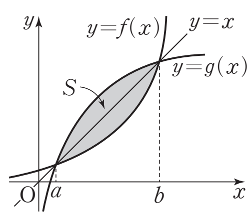
이때 $S_1=S_2$이면 $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=-\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$이므로

$$\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

따라서 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$

4. 역함수와 넓이의 관계

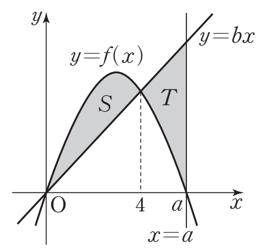
역함수가 존재하는 연속인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 두 점 (a, a), (b, b)에서만 만날 때, 닫힌구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



$$S=2\int_a^b |x-f(x)|dx$$

예제 3 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

함수 $f(x)=-x^2+ax\ (a>4)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=bx\ (b>0)$은 점 $(4,\ f(4))$에서 만난다. 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=bx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 닫힌구간 $[4,\ a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=bx$ 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때, $S=T$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

풀이 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\le c\le b$일 때 $\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx=\int_c^b\{g(x)-f(x)\}dx$이면 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=0$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=bx$가 점 $(4,\ f(4))$에서 만나므로

$-16+4a=4b$에서 $a-b=4$ …… ㉠

$S=T$에서 $\int_0^4(-x^2+ax-bx)dx=\int_4^a(bx+x^2-ax)dx$이므로 $\int_0^a\{-x^2+(a-b)x\}dx=0$이다.

즉, $\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-b}{2}x^2\right]_0^a=0$, $-\frac{1}{3}a^3+\frac{a-b}{2}a^2=0$, $a^2\left(-\frac{1}{3}a+\frac{a-b}{2}\right)=0$

$a>4$이므로 $-\frac{1}{3}a+\frac{a-b}{2}=0$, $a-3b=0$ …… ㉡

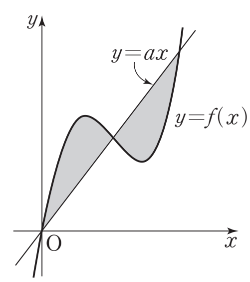
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=2$이므로 $a+b=8$

답 ③

정답과 풀이 47쪽

[21009-0153]

유제 3 함수 $f(x)=x^3-(a+3)x^2+4ax\ (a>3)$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$는 서로 다른 세 점에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같다. $f'(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)



[21009-0154]

유제 4 정의역이 $\{x|x\le 2\}$인 함수 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{16}{3}$　② 6　③ $\frac{20}{3}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 8

5. 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

설명 (1) $\frac{d}{dt}x(t)=v(t)$에서 $x(t)$는 $v(t)$의 부정적분이므로

$$\int_a^t v(t)dt=\Big[x(t)\Big]_a^t=x(t)-x(a)$$

따라서 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$, $t=b$에서의 점 P의 위치가 각각 $x(a)$, $x(b)$이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

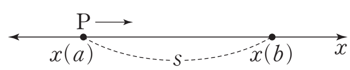
$$\begin{aligned}x(b)-x(a)&=\left\{x(a)+\int_a^b v(t)dt\right\}-x(a)\\&=\int_a^b v(t)dt\end{aligned}$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는

(ⅰ) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $v(t)\ge 0$일 때,

점 P는 양의 방향으로 움직이므로 $s=x(b)-x(a)$이다. 즉,

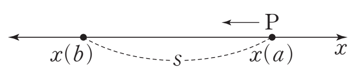
$$s=x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt=\int_a^b |v(t)|dt$$



(ⅱ) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $v(t)\le 0$일 때,

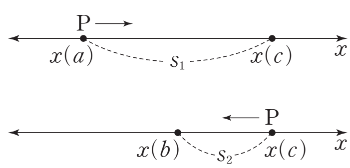
점 P는 음의 방향으로 움직이므로 $s=x(a)-x(b)$이다. 즉,

$$\begin{aligned}s=x(a)-x(b)&=-\int_a^b v(t)dt=\int_a^b \{-v(t)\}dt\\&=\int_a^b |v(t)|dt\end{aligned}$$



(ⅲ) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $v(t)\ge 0$이고, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $v(t)\le 0$일 때,

$$\begin{aligned}s=s_1+s_2&=\{x(c)-x(a)\}+\{x(c)-x(b)\}\\&=\int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt\\&=\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^b |v(t)|dt=\int_a^b |v(t)|dt\end{aligned}$$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

예제 4 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-4t+a$이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 2　② $\frac{8}{3}$　③ $\frac{10}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{14}{3}$

풀이 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면 시각 t에서의 점 P의 위치 $x(t)$는 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$이다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(4)=x(1)+\int_1^4 v(t)dt$이고, $x(1)=x(4)$이므로 $\int_1^4 v(t)dt=0$이다.

$$\int_1^4 v(t)dt=\int_1^4 (t^2-4t+a)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+at\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{64}{3}-32+4a\right)-\left(\frac{1}{3}-2+a\right)=3a-9$$

이므로 $3a-9=0$에서 $a=3$

따라서 $v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$이고 $1\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$, $t\ge 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로

시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)|dt=\int_1^4 |t^2-4t+3|dt=\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt+\int_3^4 (t^2-4t+3)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4$$
$$=\left\{(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)\right\}+\left\{\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-(9-18+9)\right\}=\frac{8}{3}$$

답 ②

정답과 풀이 47쪽

[21009-0155]

유제 5 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=at^2+bt+5$이다. $v(1)=v(2)$이고, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량이 $\frac{43}{6}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[21009-0156]

유제 6 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2+at+8$이다. 점 P가 시각 $t=b$ $(b>0)$, $t=b+2$에서 각각 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=b$에서 $t=b+4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

6. 두 점의 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라 하고, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하자. 또 시각 $t=0$에서 두 점 P, Q의 위치가 서로 같다고 하자.

(1) 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_{\mathrm{P}}(a)-x_{\mathrm{Q}}(a)|=\left|\int_0^a \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt\right|$$

(2) 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q가 만날 때

$$x_{\mathrm{P}}(a)-x_{\mathrm{Q}}(a)=\int_0^a\{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=0$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 서로 같을 때

$$\int_a^b\{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=0$$

설명 (1) 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_{\mathrm{P}}(a)=x_{\mathrm{P}}(0)+\int_0^a v_{\mathrm{P}}(t)dt,\ x_{\mathrm{Q}}(a)=x_{\mathrm{Q}}(0)+\int_0^a v_{\mathrm{Q}}(t)dt$$

이고, $x_{\mathrm{P}}(0)=x_{\mathrm{Q}}(0)$이므로 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned}|x_{\mathrm{P}}(a)-x_{\mathrm{Q}}(a)|&=\left|\left\{x_{\mathrm{P}}(0)+\int_0^a v_{\mathrm{P}}(t)dt\right\}-\left\{x_{\mathrm{Q}}(0)+\int_0^a v_{\mathrm{Q}}(t)dt\right\}\right|\\&=\left|\int_0^a \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt\right|\end{aligned}$$

(2) 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q가 만나면 두 점 P, Q 사이의 거리는 0이므로 (1)에서

$$|x_{\mathrm{P}}(a)-x_{\mathrm{Q}}(a)|=\left|\int_0^a \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt\right|=0$$

즉, $x_{\mathrm{P}}(a)-x_{\mathrm{Q}}(a)=\int_0^a \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=0$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량은 각각

$$\int_a^b v_{\mathrm{P}}(t)dt,\ \int_a^b v_{\mathrm{Q}}(t)dt$$

이므로 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 서로 같으면

$$\int_a^b v_{\mathrm{P}}(t)dt-\int_a^b v_{\mathrm{Q}}(t)dt=0,\ 즉\ \int_a^b \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=0$$

예 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)=2t$, $v_{\mathrm{Q}}(t)=4t-4$이고, 시각 $t=0$에서 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점일 때, 시각 $t=4$에서 두 점 P, Q의 위치를 구해 보자.
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 할 때,

$$x_{\mathrm{P}}(4)=\int_0^4 2tdt=\Big[t^2\Big]_0^4=16,\ x_{\mathrm{Q}}(4)=\int_0^4(4t-4)dt=\Big[2t^2-4t\Big]_0^4=16$$

이때 시각 $t=4$에서 두 점 P, Q는 만나고

$$\int_0^4 \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=\int_0^4\{2t-(4t-4)\}dt=\int_0^4(-2t+4)dt=\Big[-t^2+4t\Big]_0^4=0$$

임을 알 수 있다.

예제 5 두 점의 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$f(t)=at-8,\ g(t)=3t^2-2at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이고, 시각 $t=2$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는 30이다. 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

풀이 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 위치를 $x(t)$라 할 때, $x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$이다.

풀이 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (at-8)dt=\left[\frac{a}{2}t^2-8t\right]_0^2=2a-16$$

이고, 시각 $t=2$에서의 점 Q의 위치는

$$\int_0^2 g(t)dt=\int_0^2 (3t^2-2at)dt=\left[t^3-at^2\right]_0^2=8-4a$$

이다. 시각 $t=2$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는 30이므로

$$|(2a-16)-(8-4a)|=30,\ |6a-24|=30$$

$a>0$이므로 $a=9$

답 ⑤

정답과 풀이 48쪽

[21009-0157]

유제 7 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$f(t)=2t-8,\ g(t)=16-4t$$

이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이고, 시각 $t=a$ $(a>0)$에서 두 점 P, Q가 만난다. 시각 $t=\frac{a}{2}$에서 $t=a$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 s_1, s_2라 할 때, $|s_1-s_2|$의 값은?

① 10　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 18

[21009-0158]

유제 8 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$f(t)=3t^2-12t+a,\ g(t)=-2t+b$$

이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이고, 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는 1이다. 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 서로 같을 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

[21009-0159]

1 곡선 $y=3(x-2)^2$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21009-0160]

2 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x<1) \\ x^2-2x+2 & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{16}{3}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

[21009-0161]

3 두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[21009-0162]

4 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5$는 $x=\alpha$에서 극솟값 m을 갖는다. 닫힌구간 $[0, \alpha]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=m$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

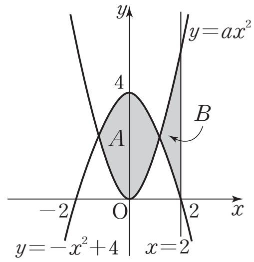
[21009-0163]

5 닫힌구간 $[0, 2]$에서 곡선 $y=x^3-4x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 닫힌구간 $[2, a]$에서 곡선 $y=x^3-4x$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $a>2$)

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[21009-0164]

6 그림과 같이 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-x^2+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 두 곡선 $y=ax^2$ $(x>0)$, $y=-x^2+4$ $(x>0)$ 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $A=2B$이다. 상수 a의 값은? (단, $a>0$)



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[21009-0165]

7 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재한다. $f(-1)=-1$, $f(2)=2$이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)\le x$이다. $\int_{-1}^{2} f(x)dx=-\frac{5}{6}$일 때, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

[21009-0166]

8 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^3+at-32$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량과 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량이 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[21009-0167]

9 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$f(t)=t^2+at+1,\ g(t)=4t^2-4t+b$$

이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이고, 시각 $t=2$, $t=4$에서 각각 두 점 P, Q가 만난다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

[21009-0168]

1 함수 $f(x)=ax^3(x-2)$가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은? (단, a, b는 양의 상수이다.)

(가) 직선 $y=b$는 곡선 $y=|f(x)|$에 접한다.

(나) 곡선 $y=|f(x)|$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{64}{45}$이다.

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{14}{9}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

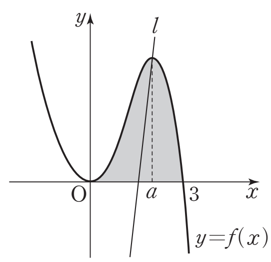
[21009-0169]

2 이차함수 $f(x)=a(x-2)(x-4)$ $(a>0)$에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 만나지 않으며, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 6이다. 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[21009-0170]

3 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$은 $x=a$에서 극대이다. 그림과 같이 점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 m인 직선을 l이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 l이 이등분한다. m의 값은? (단, a, m은 양의 상수이다.)

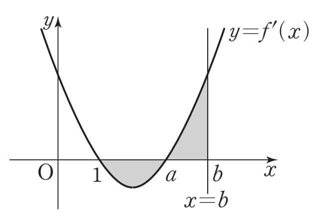


① $\frac{58}{5}$ ② 12 ③ $\frac{62}{5}$ ④ $\frac{64}{5}$ ⑤ $\frac{66}{5}$

[21009-0171]

4 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=6(x-1)(x-a)$이다. 그림과 같이 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f'(x)$ $(x\geq a)$, x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 0일 때, $a+b$의 값은?

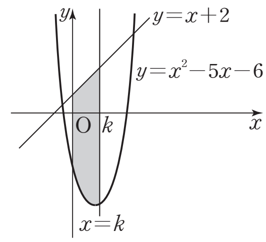
(단, a, b는 상수이고, $1<a<b$이다.)



① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

[21009-0172]

5 그림과 같이 곡선 $y=x^2-5x-6$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분한다. 닫힌구간 $[0, k]$에서 곡선 $y=x^2-5x-6$, 직선 $y=x+2$, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)



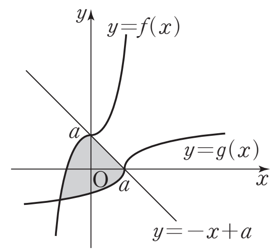
① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

[21009-0173]

6 함수 $f(x)=x^3+x+a\ (a>0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고,

$$\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a^3+2a} g(x)dx=3$$

이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+a$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[21009-0174]

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=at-3$이고, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 원점이다. 시각 $t=1$, $t=3$, $t=6$에서 점 P의 위치를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 세 수 x_1, x_2, x_3은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 상수 a의 값은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{6}{19}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{8}{21}$ ⑤ $\frac{9}{22}$

[21009-0175]

8 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$f(t)=6-2t,\ g(t)=4t-12$$

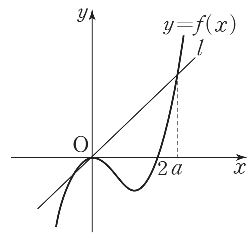
이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각 0, 15이고, $t>0$일 때 두 점 P, Q는 시각 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서 서로 만난다. 시각 $t=\alpha$에서 $t=\beta$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 s_1, s_2라 할 때, s_1+s_2의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

[21009-0176]

1 함수 $f(x)=x^3-2x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 P라 하자. 2보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$와 원점을 지나는 직선을 l이라 하고, 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 Q라 하자. $P:Q=1:b$를 만족시키도록 양수 b를 정할 때,

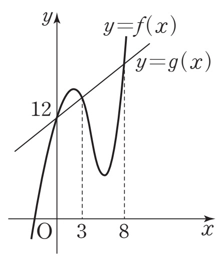
$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{b}\int_2^a f(x)dx$의 값은?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[21009-0177]

2 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=12$인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)+g(1)$의 값은? (단, $0\leq x\leq 3$에서 $f(x)\geq g(x)\geq 0$이다.)



(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 이 세 점의 x좌표는 각각 0, 3, 8이다.
(나) 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 13이다.
(다) 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=-f(x)$와 직선 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=0,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 94이다.

① $\frac{286}{9}$ ② 32 ③ $\frac{290}{9}$ ④ $\frac{292}{9}$ ⑤ $\frac{98}{3}$

[21009-0178]

3 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=-t^2+4t$이고, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 원점이다. 음이 아닌 실수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 $t=a+2$까지 점 P가 움직인 거리를 $f(a)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(1)=\frac{22}{3}$
ㄴ. $\lim_{a\to\infty}\frac{f(a)}{a^2}=2$
ㄷ. 함수 $f(a)$는 $a=2+2\sqrt{3}$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

출제 경향 정적분을 이용하여 곡선과 x축 사이의 넓이 또는 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 문제가 출제된다. 또 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어질 때, 정적분을 이용하여 점의 위치 또는 점이 움직인 거리를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

2020학년도 대수능

출제 의도 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $g(x)=|x-1|-1=\begin{cases} -x & (x<1) \\ x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 구하면

(i) $x<1$일 때, $f(x)=g(x)$에서

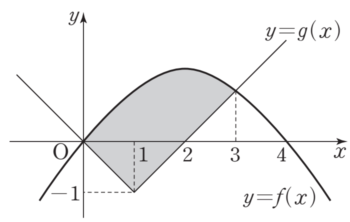
$$\frac{1}{3}x(4-x)=-x,\ x^2-7x=0,\ x(x-7)=0$$

$x<1$이므로 $x=0$

(ii) $x\geq 1$일 때, $f(x)=g(x)$에서

$$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2,\ x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$$

$x\geq 1$이므로 $x=3$



닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)\geq g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S&=\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}dx \\ &=\int_0^1 \left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(-x)\right\}dx+\int_1^3 \left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(x-2)\right\}dx \\ &=\int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx \\ &=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3 \\ &=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\} \\ &=\frac{7}{2} \end{aligned}$$

따라서 $4S=4\times\frac{7}{2}=14$

답 14

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목 | 수능 입문 → 기출 / 연습 → 연계+연계 보완 → 고난도 → 모의고사

과목: 국어 / 영어 / 수학 / 사회 / 과학

수능 입문
- 수능 감(感)잡기
- 뉴수능 스타트
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 수능 기출의 미래
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200
- 연계: 감수 수능특강
- 감수 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도 · 신유형)
- 수능의 7대 함정

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사

과목	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 개념의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	뉴수능 스타트	2022학년도 수능 평가원 예시문항 최초 분석		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출 문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품과 지문과 연관된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태 + OMR카드 실전 훈련 모의고사		전영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영