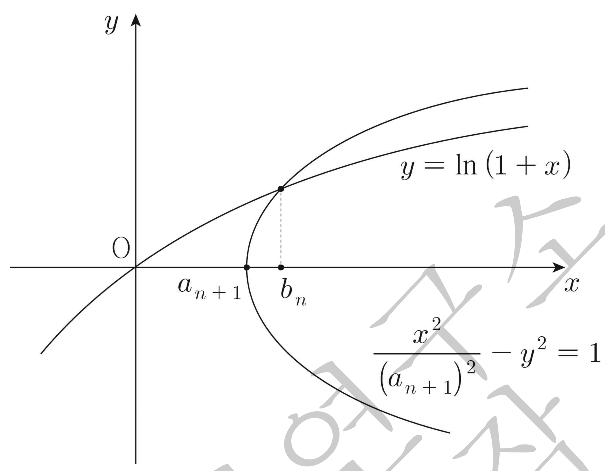
2022학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)
현장 복원 버전

[문제1] 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a라 하자. x축, y축 및 직선 $x+y=a$로 둘러싸인 직각이등변삼각형에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제1-1] 직각이등변삼각형의 빗변 위의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. **[4점]**

[문제1-2] 직각이등변삼각형의 둘레 또는 내부에 있는 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구하시오. **[4점]**

[문제2] <그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1$ ($x \ge a_{n+1}$)과 함수 $y=\ln(1+x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.



제시문 1. $x>0$인 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)<x$가 성립한다.
제시문 2. 자연수 n에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이 성립한다.

[문제2-1] 수열 $\{a_n\}$이 $1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \le \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 보이시오. **[10점]**

[문제2-2] $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하시오. **[7점]**

[문제3] 자연수 N에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 홀수 m의 값의 합을 $f(N)$이라 하자.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.
(나1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = N$이다.

예를 들어, $N=21$인 경우에 아래의 두 가지만 가능하므로 $f(21)=1+3=4$이다.

$$21=21=\sum_{k=1}^{1}(20+k),\ 21=6+7+8=\sum_{k=1}^{3}(5+k)$$

자연수 N과 홀수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 자연수의 개수를 $g_N(m)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.
(나2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \le N$이다.

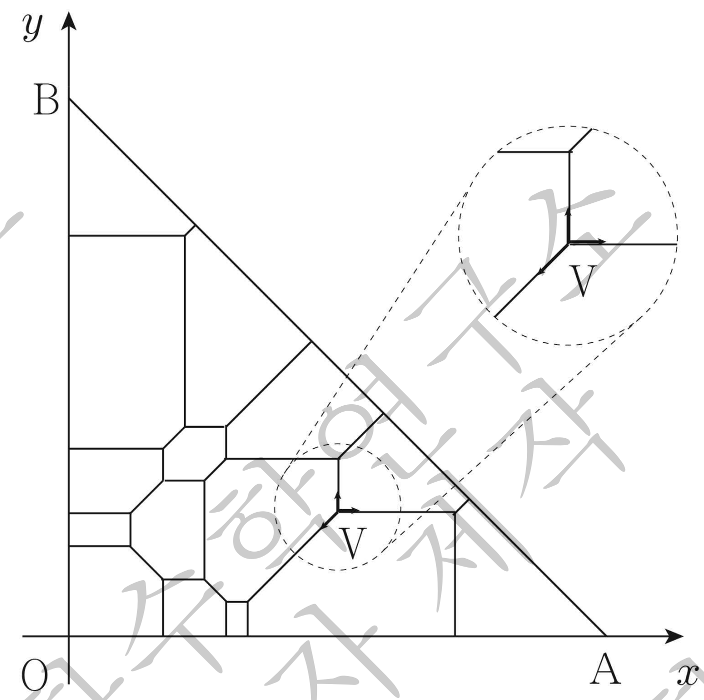
[문제3-1] N을 m으로 나눈 나머지가 r일 때, $g_N(m)$을 N, m, r를 이용하여 나타내시오. **[7점]**

[문제3-2] $\displaystyle\sum_{N=1}^{200} f(N)$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제4] 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2022,0)$, $\mathrm{B}(0,2022)$를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 OAB의 내부 및 둘레에 다음 조건을 만족하도록 여러 개의 선분을 그어 그 선분을 변으로 하는 유한 개의 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 양 끝점 중 적어도 한 개의 점이 삼각형 OAB의 내부에 있는 선분은 두 다각형의 변이 되고, 두 끝점이 모두 삼각형 OAB의 둘레에 있는 선분은 오직 한 다각형의 변이 된다.)

(가) 다각형의 모든 변은 x축, y축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 중 하나와 평행하다.
(나) 다각형의 모든 내각의 크기는 $180°$ 보다 작다.
(다) 다각형의 변과 삼각형 OAB의 변이 한 점에서 만날 때, 두 선분은 서로 수직이다.
(라) 다각형의 꼭짓점이 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 이 꼭짓점은 서로 다른 세 선분의 끝점이고 세 선분 중 두 개는 좌표축과 평행하다.

[문제4-1] <그림 2>와 같이 다각형의 꼭짓점 V가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 점 V에서 점 V와 선분으로 연결된 세 점으로 향하는 벡터와 방향이 같은 세 개의 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$가 있다. 가능한 모든 세 개의 벡터에 대하여 $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}=\vec{0}$임을 보이시오. (단, 세 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) **[5점]**



[문제4-2] 다각형의 꼭짓점 P가 삼각형 OAB의 둘레에 있고 점 P와 선분으로 연결된 점 Q가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$와 방향이 같은 벡터 $\vec{u}$를 점 P에 대한 **경계벡터**라 하자. 모든 경계벡터의 합이 $\vec{0}$임을 보이시오. (단, 경계벡터 $\vec{u}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) **[7점]**

[문제4-3] 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수가 모두 같음을 보이시오. (예를 들어, <그림 2>에서 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수는 모두 5이다.) **[7점]**