수의 분할

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 수의 분할

자연수 n에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 $\lambda=(n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k)$를 n의 분할(Partition)이라고 한다.

$$\text{(i)}\ \ n_1 \geq n_2 \geq \ \cdots \ \geq n_k \geq 1\ \ (n_i \in \mathbb{N})$$
$$\text{(ii)}\ \ n = n_1 + n_2 + \ \cdots \ + n_k$$

$\lambda=(n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k)$가 n의 분할일 때, 각 n_i를 분할 λ의 부분(Part)이라 한다. 또, n의 모든 분할의 개수를 $p(n)$, k개의 부분을 가진 n의 분할의 수를 $p(n,\, k)$로 나타낸다. 즉,

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n} p(n,\, i)$$

이다.

i가 특정 값을 가질 때 우리는 $p(n,\, i)$의 값을 쉽게 구할 수 있고, 그 외의 i에 대해서는 분할수의 점화식을 이용하여 $p(n,\, i)$를 계산할 수 있다.

① $i=1$일 때, n의 분할은 $n=n$으로 유일하므로 $p(n,\, 1)=1$이다.

② $i=n$일 때, n의 분할은 $n=\overbrace{1+1+\ \cdots \ +1}^{n}$로 유일하므로 $p(n,\, n)=1$이다.

③ $i=2$일 때, n이 짝수이면 $n=1+(n-1)=2+(n-2)=\ \cdots \ =\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{2}$의 $\dfrac{n}{2}$가지,

n이 홀수이면 $n=1+(n-1)=2+(n-2)=\ \cdots \ =\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n+1}{2}$의 $\dfrac{n-1}{2}$가지가

있으므로 $p(n,\, 2)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$이다. (단, $[x]$는 가우스 함수 또는 바닥 함수)

④ $i=n-1$일 때, n의 분할은 $n=\overbrace{2+1+1+\ \cdots \ +1}^{n-1}$로 유일하므로 $p(n,\, n-1)=1$이다.

⑤ $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$라 하자. 이때 $n_i=1$인 i가 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하면, $n_i=1$인 i가 존재하는 경우 $n-1=\sum_{i\neq j\in[k]}n_j$이므로 이때의 경우의 수는 $p(n-1,k-1)$이다. (단, $[k]:=\{n\in\mathbb{N}\mid n\le k\}$) 또한 그러한 i가 존재하지 않는 경우 모든 n_i에 대하여 $n_i{}'=n_i-1$로 정의하면 $n-k=\sum_{i=1}^{k}n_i{}'$이고 $n_k{}'\ge 1$이므로 분할의 조건이 만족되어 경우의 수는 $p(n-k,k)$가 된다. 이 두 가지 경우는 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙을 적용하면 다음을 얻는다.

$$p(n,k)=p(n-1,k-1)+p(n-k,k)$$

위 점화식을 연속해서 적용하거나 비슷한 조합적 논리를 사용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$p(n,k)=\sum_{i=1}^{k}p(n-k,i)$$

예제 1) 서로 다른 k개의 부분을 갖는 $n+\frac{k(k+1)}{2}$의 분할의 수는 k개의 부분을 갖는 $n+k$의 분할의 수와 같음을 보여라.

pf) $\sum_{i=1}^{k}x_i=n+\frac{k(k+1)}{2}$ $(x_1>x_2>\cdots>x_k\ge 1)$ 이라 하자. 이때 $x_k=x_k{}'$, $x_{k-1}=x_{k-1}{}'+1$, $\cdots$, $x_1=x_1{}'+(k-1)$, 즉 $1\le i\le k$에 대하여 $x_i{}'=x_i-(k-i)$라 놓으면 $x_1{}'\ge x_2{}'\ge\cdots\ge x_k{}'\ge 1$이고

$$\sum_{i=1}^{k}x_i{}'=n+\frac{k(k+1)}{2}-\sum_{i=1}^{k}(k-i)=n+\frac{k^2+k}{2}-\frac{k(k-1)}{2}=n+k$$

이다. 이는 k개의 부분을 갖는 $n+k$의 분할과 일대일대응되므로 증명이 완료된다. ■

예제 2) 모든 자연수 n에 대하여, 부분이 모두 다른 n의 분할의 수와 부분이 모두 홀수인 n의 분할의 수가 같음을 보여라. (Leonhard Euler, 1748)

pf) 부분이 모두 홀수인 n의 분할에서 같은 홀수 x_i끼리는 곱하기로 묶으면,

$$n=\sum_{i=1}^{k}n_ix_i \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

와 같이 쓸 수 있다. ($n_i \in \mathbb{N}$) 이때 같은 홀수끼리 묶었으므로 $i \neq j$이면 $x_i \neq x_j$이다. 이제 홀수들의 계수 n_i의 2진법 표현을 고려하자. $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$와 같이 n_i를 2의 거듭제곱의 합으로 바꾸어,

$$n_i = \sum_{j=0}^{f(i)} m_{i,j} \cdot 2^j \ \ (m_{i,j} \in \{0, 1\})$$

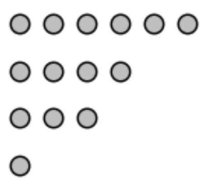
과 같이 쓰자. 이를 다시 (*)에 대입하여 전개하면

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \left[x_i \cdot \sum_{j=0}^{f(i)} m_{i,j} \cdot 2^j \right]$$

이 된다. 이때 각 항 $x_i m_{i,j} \cdot 2^j$를 생각하면, 2의 지수 j가 같다면 홀수 x_i가 다르고, x_i는 홀수이므로 2의 지수에 영향을 주지 않으므로 각 부분은 모두 다르다는 것을 알 수 있다. 즉 한쪽 방향으로의 대응이 성립하고, 이와 비슷한 방법으로 각 부분을 2의 거듭제곱과 나머지 부분으로 소인수분해하여 분배하는 과정으로 역방향의 대응도 성립함을 보일 수 있다. 따라서 일대일대응 관계가 성립한다. ■

Ⅱ. 페러 다이어그램(Ferrers Diagram)

$\lambda = (n_1, n_2, \cdots, n_k)$를 n의 분할이라 하자. 이때 i번째 행에 n_i개의 칸, 혹은 n_i개의 공을 그린 그림을 분할 λ의 페러 다이어그램(Ferrers Diagram)이라 한다. 예를 들어, $14 = 6 + 4 + 3 + 1$의 페러 다이어그램은 아래 그림과 같다.



분할 λ의 페러 다이어그램에서 i번째 열에 있는 칸의 수(공의 수)를 m_i라 하면, $\lambda' = (m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots)$도 n의 분할이 되고, 이러한 방법으로 얻어진 분할 λ'을 λ의 공액분할(Conjugate Partition)이라 한다.

또한, 페러 다이어그램의 주대각선은 페러 다이어그램의 좌측 상단을 원점으로 설정했을 때 직선 $y = -x$의 그래프와 같고, 임의의 분할 λ의 페러 다이어그램을 주대각선에 대칭시킨 페러 다이어그램에 해당하는 분할 λ'은 λ의 공액분할이 된다.

위 예시에 대한 공액분할은 $14 = 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$이다.

어떤 분할과 그 공액분할의 페러 다이어그램을 각각 생각해보면 아주 중요한 성질을 얻을 수 있다.

〈 Claim 〉

(i) 부분의 개수가 정확히 m개인 n의 분할의 수는 부분의 최댓값이 m인 n의 분할의 수와 같다.

(ii) 부분의 개수가 m개 이하인 n의 분할의 수는 각 부분이 m 이하인 n의 분할의 수와 같다.

(i)의 경우 각 부분이 m 이하인 것은 (ii)와 동일하나, 이 경우 '부분 m'이 반드시 존재해야 한다는 점에서 차이가 있다. 또한 (i)을 연쇄적으로 적용하면 (ii)가 성립함을 알 수 있다.

위에서 언급한 예시 $14=6+4+3+1$로 생각해보자. 이 분할은 부분의 개수가 4개인 분할이므로 그 페러 다이어그램은 4개의 행으로 이루어져 있고, 따라서 이를 세로로 읽은 공액분할은 그 부분의 최댓값이 4이다. 또한 이 분할의 부분의 최댓값은 6이므로 그 공액분할은 모두 6개의 부분으로 구성되어 있다.

이를 조금만 엄밀히 기술하면 간단히 증명이 가능하므로, 본문에서는 위 예시로 받아들이고 넘어가도록 하겠다. 엄밀한 증명이나 정의에 대해 더 읽어보고 싶은 독자들은 참고문헌 [4]의 논문을 참고하길 바란다.

예제 3) 방정식 $x_1+2x_2+3x_3=144$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

pf) 이 문제는 일반적으로 N.G.D. Theorem을 이용하여 풀어야 하겠지만, 앞서 설명한 페러 다이어그램과 수의 분할을 이용하면 간단하게 계산할 수 있다.

$x_1+2x_2+3x_3=144$를 1이 x_1개, 2가 x_2개, 3이 x_3개 있다고 보자. 그러면 이는 Claim에 의해 각 부분이 3 이하인 144의 분할이 된다. ($x_3=0$일 수 있으므로 3 이하이다.) 이는 부분의 개수가 3개 이하인 144의 분할의 수와 같으므로 답은

$$p(144,3)+p(144,2)+p(144,1)=\mathrm{round}\left(\frac{144^2}{12}\right)+\left[\frac{144}{2}\right]+1$$

$$=1728+72+1=1801$$

이다. ($[x]$는 가우스 함수 또는 바닥 함수, $\mathrm{round}(x)$는 반올림 함수이고, 자연수 n에 대하여 $p(n,3)=\mathrm{round}\left(\frac{n^2}{12}\right)$임이 알려져 있다.) ■

예제 4) 방정식 $n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k$에서 $x_{k-1} = 0$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

pf) $x_{k-1} = 0$으로 고정된 상태이므로, kx_k를 좌변으로 넘겨 $n - kx_k$를 생각한다. 이때 x_k의 범위는 $0 \le x_k \le \left[\frac{n}{k}\right]$이고, $N_k = n - kx_k$에 대하여 $\sum_{i=1}^{k-2} ix_i = N_k$가 성립하므로 각 N_k에 대하여 정수해의 개수는

$$p(N_k,\ k-2) + p(N_k,\ k-3) + \cdots + p(N_k,\ 1) = \sum_{i=1}^{k-2} p(N_k,\ i)$$

이다. 따라서 전체 정수해의 개수는

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \sum_{i=1}^{k-2} p(n-kj,\ i)$$

가 된다. ■

예제 5) 20의 분할 중에서 각 부분이 10 이하이며 7개의 부분을 갖는 분할의 수는 각 부분이 8 이하이며 9개의 부분을 갖는 22의 분할의 수와 같음을 보여라.

pf) 분할 $\lambda : 20 = \sum_{i=1}^{7} x_i \ (10 \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_7 \ge 1)$을 생각하자. 이때 양변에 10을 더한 후 양변에서 8을 빼면

$$\lambda' : 22 = 9 + (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_7 - 1)$$

이다. 이제 $1 \le i \le 7$에 대하여 $x_i{}' = x_i - 1$로 치환하면 $22 = 9 + \sum_{i=1}^{7} x_i{}'$이고, 모든 i에 대하여 $0 \le x_i{}' \le 9$이다. 9가 부분으로써 포함되어 있으므로 λ'의 공액분할 λ''은 9개의 부분을 갖고, 분할 λ'은 부분의 개수가 8개 이하이므로 λ''의 각 부분은 8 이하이다. 즉 $\lambda \to \lambda' \to \lambda''$의 일대일대응 관계가 성립하므로 증명이 완료되었다. ■

Ⅲ. 참고문헌

[1] 박종안, *이산수학(6판)*

[2] Wikipedia, *Partition (number theory)*, 2022. 03. 28.
https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)

[3] Wolfram MathWorld, Ferrers Diagram
https://mathworld.wolfram.com/FerrersDiagram.html

[4] *Notes on partitions and their generating functions*
https://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/partitions.pdf