[수학1] [10수열의 합] 교사평경 최근 3개년

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

01 시그마의 뜻1 (표현과 나열)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

1. 좌표평면 위에 5개의 점 $\mathrm{P}_1(-2,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(-1,\ 2)$, $\mathrm{P}_3(0,\ 3)$, $\mathrm{P}_4(1,\ 2)$, $\mathrm{P}_5(2,\ 4)$가 있다. 점 $\mathrm{P}_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$의 x좌표를 x_i, y좌표를 y_i라 할 때, $\sum_{i=1}^{5}(ax_i+b-y_i)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 12

2. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은?

① 88 ② 91 ③ 94

④ 97 ⑤ 100

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

02 시그마의 뜻2 (등차수열)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 17

3. $a_3=1$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}-\sum_{k=1}^{12} a_{2k+8}=48$을 만족시킬 때, a_{39}의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 17

4. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7=37$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{13} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{21} \lvert a_k \rvert$의 값은?

① 681 ② 683 ③ 685
④ 687 ⑤ 689

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 19

5. 다음은 공차가 1보다 크고 $a_3+a_5=2$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-5|a_k|)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하는 과정이다.

> $a_3+a_5=2$에서 $a_4=$ (가)
>
> 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하고
>
> $\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2$과 $\sum_{k=1}^{5}|a_k|$를 각각 d에 대한 식으로 나타내면
>
> $$\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2=15d^2-10d+5$$
>
> $$\sum_{k=1}^{5}|a_k|=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서 $\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-5|a_k|)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차는 (다)이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(d)$라 할 때, $f(p+2q)$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 14

6. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5=5$이고 $\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=20$이다. a_6의 값은?

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$
④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 9

7. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$$

라 하자. $\frac{S_{10}}{T_{10}}=6$일 때, T_{37}의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 20

8. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 6

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=30$일 때, a_2+a_4의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 21

10. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.

(나) $a_{2m}=-a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=128$인 자연수 m이 존재한다.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

11. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$

④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

03 시그마의 뜻3 (등비수열)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 11

12. 첫째항이 $\frac{1}{5}$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 4a_2$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3}{13}\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 17

13. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은?

> (가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 8

14. 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 = b_1,\quad \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = 160$$

일 때, $a_3 + b_3$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

04 시그마의 성질1 (기본성질)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 5

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10,\quad \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k)$의 값은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 10

16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 8,\ \sum_{k=1}^{5} b_k = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4)$의 값은?

① 19 ② 21 ③ 23

④ 25 ⑤ 27

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 5

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2 = 67$일 때,

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 6

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35

④ 40 ⑤ 45

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 18

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k) = 45,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k - b_k) = 3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 25

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} a_n^2 = 10,\ \sum_{n=1}^{10} a_n(2b_n - 3a_n) = 16$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n(6a_n + 7b_n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 27

21. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k+1} = 240,\ \sum_{k=1}^{m} (a_k + m) = 360$$

을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 18

22. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56,\ \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 18

[출처] 2022 일반_기타개인 해설교체용

23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\ \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 25

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=20,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=50$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

01 자연수의 거듭제곱의 합1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 26

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+k)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 22

27. $\sum_{k=1}^{5}k^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 25

28. $\sum_{k=1}^{10}(k^2-ak)=275$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 3

29. $\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)$의 값은?

① 600 ② 605 ③ 610
④ 615 ⑤ 620

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 18

30. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

02 자연수의 거듭제곱의 합2 (식 변형)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 18

31. $\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$의 값을 구하시오

03 수1

10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

04 자연수의 거듭제곱의 합4 (지수꼴의 일반항)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 18

32. 18. 부등식 $\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}<\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<\sum_{k=1}^{5}\left(2\times3^{k-1}\right)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

01 소거형1 (시그마의 성질)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 7

33. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

03 소거형3 (기타)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 21

34. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$이다.

$\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 100이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 150 ② 154 ③ 158
④ 162 ⑤ 166

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

35. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2-3n-2}+6n-1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 110 ② 114 ③ 118
④ 122 ⑤ 126

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

01 항등식과 수열1 (합과 일반항의 관계)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

36. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 24

37. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n-b_n)=10,\ \sum_{n=1}^{6}(2a_n-2b_n)=56$$

일 때, a_6-b_6의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 13

38. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1}=2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2=S_2-S_1=-\frac{7}{6}$이므로 $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}$이다.
>
> $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=-\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n=-\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로
>
> $$a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$
>
> $$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{(다)}$$
>
> $$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5)\times g(3)\times h(6)$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9

④ 12 ⑤ 15

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 7

39. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{7}{10}$

④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

40. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2k-1}=2^n$$

을 만족시킬 때, a_1+a_5의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

02 항등식과 수열2 (주어진 일반항)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 8

41. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2n+1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{4}{27}$ ③ $\dfrac{5}{27}$

④ $\dfrac{2}{9}$ ⑤ $\dfrac{7}{27}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 15

42. 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n = \sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{4}}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \log_2 a_k$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

03 항등식과 수열3 (일반항 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 25

43. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 55$일 때, $\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 10

44. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① $\frac{10}{31}$ ② $\frac{11}{31}$ ③ $\frac{12}{31}$
④ $\frac{13}{31}$ ⑤ $\frac{14}{31}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

45. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

04 활용1 (일반항 구하기. 대수와 식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 11

46. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$$

의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은?

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 14

47. 2이상의 자연수 n에 대하여 $(n-5)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 29

48. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a < b < c \leq 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

49. 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{3} a_{3k}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 15

50. 2이상의 자연수 n에 대하여 $(2n-5)(2n-9)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{8} f(n)$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 17

51. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2^{n-3}-8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{m} f(n)=15$가 되도록 하는 자연수 m의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 4

52. 자연수 $k\ (k \geq 2)$에 대하여 집합

$$A=\{(a,\ b)\,|\,a,\ b\text{는 자연수},\ 2 \leq a \leq k,\ \log_a b \leq 2\}$$

의 원소의 개수가 54일 때, 집합 A의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b+k$의 최댓값은?

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 28

53. 2 이상의 자연수 n과 상수 k에 대하여 $n^2-17n+19k$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

54. 자연수 $m\ (m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은?

① 37 ② 42 ③ 47
④ 52 ⑤ 57

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

05 활용2 (일반항 구하기. 함수와 도형)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 13

55. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $(n,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 O_n이라 하자. 점 $(-1,\ 0)$을 지나고 원 O_n과 제 1사분면에서 접하는 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n^2$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{23}{42}$ ③ $\frac{25}{42}$

④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{29}{42}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 27

56. 자연수n에 대하여 $0 \le x < 2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

57. 함수 $y=2^x-\sqrt{2}$의 그래프 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=n$일 때, 점 P의 x좌표를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{6} a_n$의 정수 부분은? (단, 점 P는 제 1사분면에 있다.)

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

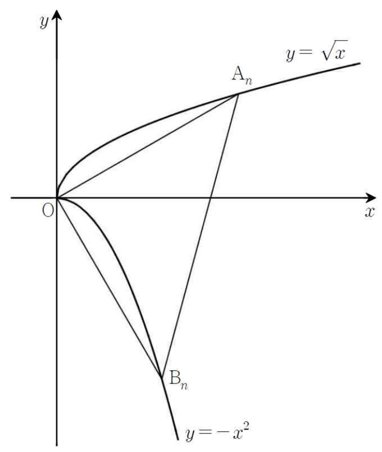
58. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)$의 그래프와 한 점에서 만나고, 직선 $y=n$이 함수 $y=\left|2^{-x}-m\right|$의 그래프와 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{n=5}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{30}$

④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{50}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

59. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$위의 점 $\mathrm{A_n}(\mathrm{n}^2,\ \mathrm{n})$과 곡선 $y=-x^2\ (x \geq 0)$위의 점 $\mathrm{B_n}$이 $\overline{\mathrm{OA_n}}=\overline{\mathrm{OB_n}}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A_nOB_n}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



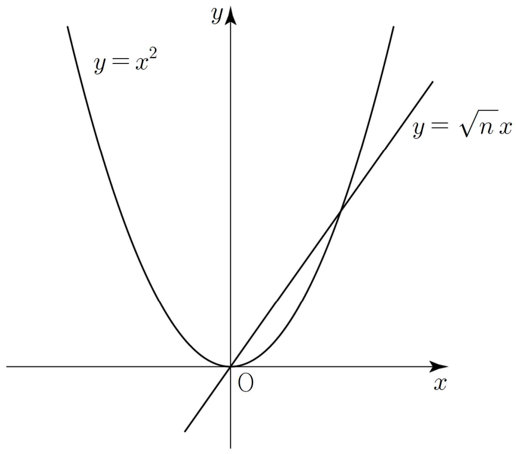
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 17

60. 자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 2^{n+1}$에서 함수 $y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right)$의 그래프가 직선 $y = \dfrac{1}{n}$과 만나는 모든 점의 x좌표의 합을 x_n이라 하자. $\sum\limits_{n=1}^{6} x_n$의 값은?

① 122 ② 126 ③ 130
④ 134 ⑤ 138

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 10

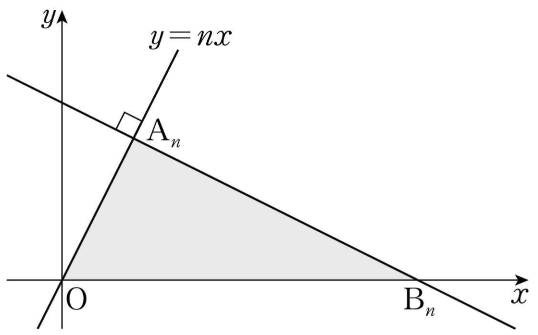
61. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = x^2$과 직선 $y = \sqrt{n}x$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(n)$이라 하자.
$\sum\limits_{n=1}^{10} \dfrac{1}{\{f(n)\}^2}$의 값은?



① $\dfrac{9}{11}$ ② $\dfrac{19}{22}$ ③ $\dfrac{10}{11}$
④ $\dfrac{21}{22}$ ⑤ 1

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 10

62. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}_n(n,\ n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 $\mathrm{A}_n OB_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 점 $\mathrm{A}_n(n,\ n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y=$ (가) $\times x+n^2+1$
>
> 이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면
>
> $S_n=$ (나)
>
> 따라서
>
> $\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{n^3}=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은?

① 105 ② 110 ③ 115
④ 120 ⑤ 125

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

63. 자연수 n에 대하여 곡선

$y=n\sin(n\pi x)\ (0 \le x \le 1)$

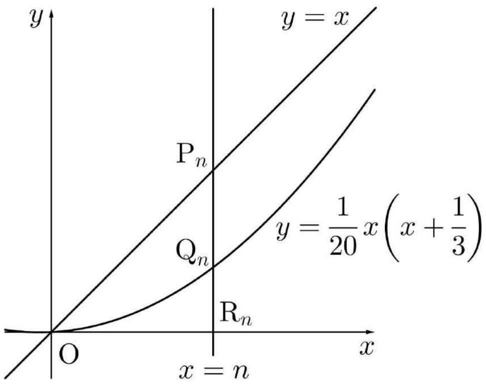
위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 340 ② 350 ③ 360
④ 370 ⑤ 380

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

64. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 P_n, 곡선 $y=\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)$과 만나는 점을 Q_n, x축과 만나는 점을 R_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 길이 중 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① $\frac{115}{6}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ $\frac{39}{2}$
④ $\frac{59}{3}$ ⑤ $\frac{119}{6}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 17

65. 실수 $a(a>1)$과 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 함수 $y=3a^x$, $y=3a^{x-1}$
의 그래프와 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n, 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이를 S_n이라 하자. 두 실수 L, S에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} l_k = L$, $\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3} = S$일 때, 다음은 $\frac{S}{L}=\frac{2}{5}$를 만족시키는 a의 값을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각 $(n,\ 3a^n)$, $(n,\ 3a^{n-1})$
> 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이 l_n은
> $l_n=3(a-1)\times a^{n-1}$이므로
> $L=\sum_{k=1}^{20} l_k = 3\times\left(\boxed{(가)}\right)$이다.
> 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이 S_n은
> $S_n=3(a-1)\times(a^{n-1}+a^{n+1})$이므로
> $S=\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}$
> $=S_1+S_5+S_9+S_{13}+S_{17}$
> $=\frac{3}{\boxed{(나)}}\times\left(\boxed{(가)}\right)$이다.
> 따라서
> $\frac{S}{L}=\frac{\frac{3}{\left(\boxed{(나)}\right)}\times\left(\boxed{(가)}\right)}{3\times\left(\boxed{(가)}\right)}=\frac{1}{\left(\boxed{(나)}\right)}=\frac{2}{5}$
> 이므로 $a=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{f(\sqrt{2})}{g(20p)}$의 값은?

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

66. 좌표평면에 네 점 A$(0,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C$(1,\ 1)$, D$(0,\ 1)$이 있다. 자연수 n에 대하여 집합 X_n은 다음 조건을 만족시키는 모든 점 $(a,\ b)$를 원소로 하는 집합이다.

> (가) 점 $(a,\ b)$는 정사각형 ABCD의 내부에 있다.
> (나) 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P와 점 $(a,\ b)$ 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{1}{2^n}$이다.
> (다) $a=\frac{1}{2^k}$이고 $b=\frac{1}{2^m}$인 자연수 $k,\ m$이 존재한다.

집합 X_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 100 ② 120 ③ 140
④ 160 ⑤ 180

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 30

67. $\frac{12}{5}<k\leq 4$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 짝수이면
> a_n은 $0\leq x\leq 2$에서 직선 $y=-\frac{k}{2n}$와
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
> (나) n이 홀수이면
> a_n은 $0\leq x\leq 2$에서 직선 $y=\frac{k+1}{n}$과
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0<a_2<6$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

07 활용4 (추론, 규칙적인 변화)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 13

68. $\sum_{n=1}^{20}(-1)^n n^2$의 값은?

① 195 ② 200 ③ 205

④ 210 ⑤ 215

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

69. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn \ (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20} = 199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

70. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은?

① 150 ② 160 ③ 170

④ 180 ⑤ 190

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 7

71. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 235 ② 240 ③ 245
④ 250 ⑤ 255

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

08 활용5 (여러가지 추론)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 17

72. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ 라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_7=T_7$
>
> (나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여
> $S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은?

① 96 ② 102 ③ 108
④ 114 ⑤ 120

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 17

73. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = a_6 + a_8$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은?

① 96 ② 102 ③ 108
④ 114 ⑤ 120

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

74. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

(가) $\mid a_m \mid = \mid a_{m+3} \mid$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 21

75. 첫째항이 b (b는 자연수)이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 14$를 만족시키는 모든 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m번째 수를 b_m이라 하자. $\sum_{m=1}^{10} b_m$의 값은?

① 345 ② 350 ③ 355
④ 360 ⑤ 365

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 21

76. 양수 a와 0이 아닌 실수 d에 대하여 첫째항이 모두 a이고, 공차가 각각 d, $-2d$인 두 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=|b_7|$
>
> (나) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-|b_k|)$라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \le 108$이고, $S_p=108$인 자연수 p가 존재한다.

$S_n \ge 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 할 때, a_m의 값은?

① 46 ② 50 ③ 54
④ 58 ⑤ 62

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

09 활용6 (격자점)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 29

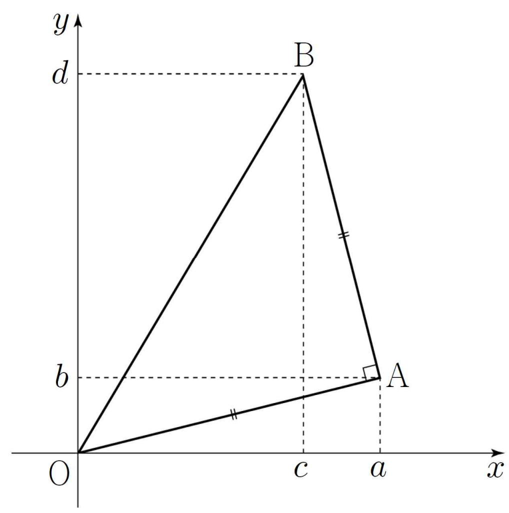
77. 자연수 n에 대하여 두 점 A$(0,\ n+5)$, B$(n+4,\ 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 14

78. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

> ◦ $a>b$
>
> ◦ 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 T_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여

점 $\mathrm{B}(c,\ d)$가 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로

$b<\dfrac{n}{2}$이다.

$\dfrac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $n-2k$이다.

2 이상의 자연수 m에 대하여

(ⅰ) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 $\boxed{\text{(가)}}$까지이므로

$$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}}(2m-2k)=\boxed{\text{(나)}}$$

(ⅱ) $n=2m+1$인 경우

$$T_{2m+1}=\boxed{\text{(다)}}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\displaystyle\sum_{n=4}^{20} T_n=614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은?

① 71 ② 74 ③ 77 ④ 80 ⑤ 83

[수학1] [10수열의 합] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.27

1. [정답] 3
2. [정답] ②
3. [정답] ①
4. [정답] ⑤
5. [정답] ④

6. [정답] ②
7. [정답] ③
8. [정답] 25
9. [정답] ①
10. [정답] 170

11. [정답] ③
12. [정답] ②
13. [정답] ①
14. [정답] ②
15. [정답] ①

16. [정답] ⑤
17. [정답] ⑤
18. [정답] ③
19. [정답] 9
20. [정답] 221

21. [정답] 29
22. [정답] 12
23. [정답] 13
24. [정답] 22
25. [정답] 10

26. [정답] 61
27. [정답] 55
28. [정답] 2
29. [정답] ④
30. [정답] 3

31. [정답] 109
32. [정답] 105
33. [정답] ④
34. [정답] ④
35. [정답] ②

36. [정답] 58
37. [정답] 18
38. [정답] ⑤
39. [정답] ⑤
40. [정답] 146

41. [정답] ②
42. [정답] ⑤
43. [정답] 160
44. [정답] ①
45. [정답] ④

46. [정답] ①
47. [정답] ③
48. [정답] 525
49. [정답] 49
50. [정답] ③

51. [정답] ②
52. [정답] ⑤
53. [정답] 3
54. [정답] ③
55. [정답] ③

56. [정답] 169
57. [정답] ②
58. [정답] ①
59. [정답] 395
60. [정답] ②

61. [정답] ③
62. [정답] ⑤
63. [정답] ⑤
64. [정답] ⑤
65. [정답] ④

66. [정답] ①
67. [정답] 53
68. [정답] ④
69. [정답] 282
70. [정답] ⑤

71. [정답] ⑤

72. [정답] ④
73. [정답] ④
74. [정답] ②
75. [정답] ④

76. [정답] ③
77. [정답] 164
78. [정답] ⑤

[수학1] [10수열의 합] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] 3

[해설]

$P_1(-2,\ 1)$, $P_2(-1,\ 2)$, $P_3(0,\ 3)$, $P_4(1,\ 2)$, $P_5(2,\ 4)$에 대하여 식에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{5}(ax_i+b-y_i)^2$$

$$=(-2a+b-1)^2+(-a+b-2)^2+(b-3)^2$$
$$+(a+b-2)^2+(2a+b-4)^2$$

$=10a^2+5b^2-12a-24b+34$

$=10\left(a-\dfrac{3}{5}\right)^2+5\left(b-\dfrac{12}{5}\right)^2+\dfrac{8}{5}$

따라서 $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{12}{5}$일 때 최솟값을 갖는다.

$$\therefore\ a+b=\frac{3}{5}+\frac{12}{5}=3$$

2) [정답] ②

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$$

$$=a_1-a_{n+1}$$

그런데 조건에서 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$, $a_1=1$이므로

$$a_{n+1}=n^2-n+1$$

$$\therefore a_{11}=91$$

3) [정답] ①

[해설]

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum_{k=1}^{12}a_{2k+8}$$

$$=(a_2+a_4+\cdots+a_{40})-(a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{32})$$

$$=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{34}+a_{36}+a_{38}+a_{40}$$

등차중항의 성질에 의해 등차수열 $\{a_n\}$은 $m+l=42$인 두 자연수 m, l에 대하여 $a_m+a_l=2a_{21}$을 만족시키므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum_{k=1}^{12}a_{2k+8}$$

$$=(a_2+a_{40})+(a_4+a_{38})+(a_6+a_{36})+(a_8+a_{34})$$

$$=2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}=48$$

그러므로 $a_{21}=6$이고 $a_3+a_{39}=2a_{21}=12$

따라서 $a_{39}=12-a_3=11$

4) [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_7=a_1+6d=37$

조건 (나)에 의하여 $a_{13}\ge 0$이고, $a_{14}\le 0$

$$a_1+12d\ge 0,\ 37+6d\ge 0,\ -\frac{37}{6}\le d$$

$$a_1+13d\le 0,\ 37+7d\le 0,\ d\le -\frac{37}{7}$$

$-\dfrac{37}{6}\le d\le -\dfrac{37}{7}$이고 d는 정수이므로 $d=-6$, $a_1=73$

따라서

$$\sum_{k=1}^{21}|a_k|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{21}|$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_{13}+(-a_{14})+(-a_{15})+\cdots+(-a_{21})$$

$$=(a_1+a_2+\cdots a_{13})-(a_{14}+a_{15}+\cdots+a_{21})$$

$$=\sum_{k=1}^{13}a_k-\left(\sum_{k=1}^{21}a_k-\sum_{k=1}^{13}a_k\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{13}a_k-\sum_{k=1}^{21}a_k$$

$$=2\times\frac{13\{2\times 73+12\times(-6)\}}{2}$$
$$-\frac{21\{2\times 73+20\times(-6)\}}{2}$$

$$=689$$

5) [정답] ④

[해설]

$a_3+a_5=2a_4$이므로 $a_3+a_5=2$에서 $a_4=\boxed{1}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=1-3d,\ a_2=1-2d,\ a_3=1-d,$

$a_4=1,\ a_5=1+d$

$d>1$이므로 $a_1<0,\ a_2<0,\ a_3<0,\ a_5>0$

$\sum_{k=1}^{5} {a_k}^2$과 $\sum_{k=1}^{5} |a_k|$를 각각 d에 대한 식으로 나타내면

$\sum_{k=1}^{5} {a_k}^2$

$=(1-3d)^2+(1-2d)^2+(1-d)^2+1^2+(1+d)^2$

$=15d^2-10d+5$

$\sum_{k=1}^{5} |a_k|$

$=|1-3d|+|1-2d|+|1-d|$

$+|1|+|1+d|$

$=(3d-1)+(2d-1)+(d-1)+1+(1+d)$

$=\boxed{7d-1}$

그러므로

$\sum_{k=1}^{5}\left(a_k^2-5|a_k|\right)$

$=(15d^2-10d+5)-5(7d-1)$

$=15d^2-45d+10$

$=15\left(d-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{95}{4}$

$d>1$이므로 $\sum_{k=1}^{5}\left({a_k}^2-5|a_k|\right)$의 값이 최소가 되도록 하는

수열 $\{a_n\}$의 공차는 $\boxed{\frac{3}{2}}$이다.

따라서 $p=1,\ q=\frac{3}{2},\ f(d)=7d-1$이므로

$f(p+2p)=f(4)=27$

6) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_5=5$이므로

$a_3=5-2d,\ a_4=5-d,\ a_6=5+d,\ a_7=5+2d$

그러므로

$\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|$

$=|2a_3-10|+|2a_4-10|+|2a_5-10|$

$+|2a_6-10|+|2a_7-10|$

$=|-4d|+|-2d|++|2d|+|4d|$

$=12d$

$=20$

따라서 $d=\frac{5}{3}$이므로 $a_6=a_5+d=\frac{20}{3}$

7) [정답] ③

[해설]

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times 2a_{\frac{11}{2}}=10a_{\frac{11}{2}}$

$T_{10}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_9+a_{10}=5d$

$\frac{S_{10}}{T_{10}}=6$에서 $10a_{\frac{11}{2}}=6\times 5d$이므로 $a_{\frac{11}{2}}=3d$

즉, $1+\frac{9}{2}d=3d$이므로 $d=-\frac{2}{3}$

$T_{37}=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{36}-a_{37}$

$=-a_1-18d$

$=-1-18\times\left(-\frac{2}{3}\right)=11$

8) [정답] 25

[해설]

$a_3+a_5=0$에서 $a_4=0$이다. 공차를 d라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 $-3d,\ -2d,\ d,\ 0,\ d,\ 2d,\ \cdots$

$d\le 0$이면 $2(-3d-2d-d)=-12d=30$

만족하는 정수 d가 없다. 따라서 $d>0$이다.

그러면 $2(d+2d)=6d=30,\ d=5$

$\therefore a_9 = a_4 + 5d = 25$

9) [정답] ①

[해설]
등차중항의 성질에 의하여
$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 30$이므로 $a_3 = 6$

따라서 $a_2 + a_4 = 12$

10) [정답] 170

[해설]
$a_{2m} = -a_m$에서 $a_m + md = -a_m$

$2a_m = -md$이므로

m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m이 짝수, 즉 $m = 2p$(p는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned} a_{2m} + a_m &= a_{4p} + a_{2p} \\ &= \{a_1 + (4p-1)d\} + \{a_1 + (2p-1)d\} \\ &= 2\{a_1 + (3p-1)d\} \\ &= 2a_{3p} = 0 \end{aligned}$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.

$m = 2l - 1$(l은 자연수)라 하면

$a_{4l-2} = -a_{2l-1}$에서

$$\begin{aligned} a_{3l-1} &= a_{4l-2} - (l-1)d \\ &= -a_{2l-1} - (l-1)d \\ &= -a_{3l-2} \end{aligned}$$

이고 $d > 0$이므로

$1 \le n \le 3l-2$일 때 $a_n < 0$,

$n \ge 3l-1$일 때 $a_n > 0$이다.

$\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = \sum_{k=2l-1}^{4l-2} |a_k|$

$= -a_{2l-1} - a_{2l} - a_{2l+1} - \cdots - a_{3l-2}$

$+ a_{3l-1} + a_{3l} + a_{3l+1} + \cdots + a_{4l-2}$

$= -a_{2l-1} - (a_{2l-1} + d) - (a_{2l-1} + 2d) - \cdots - (a_{2l-1} + (l-1)d)$

$+ (a_{2l-1} + ld) + \{a_{2l-1} + (l+1)d\} + \cdots + \{a_{2l-1} + (2l-1)d\}$

$= -\{1 + 2 + 3 \cdots + (l-1)\}d$

$\qquad + \{l + (l+1) + (l+2) + \cdots + (2l-1)\}d$

$= -\frac{l(l-1)}{2}d + \frac{l\{l + (2l-1)\}}{2}d$

$= l^2 d = 128$

l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 (l, d)는 $(1, 128)$, $(2, 32)$, $(4, 8)$, $(8, 2)$이다.

따라서 모든 d의 값의 합은 $2 + 8 + 32 + 128 = 170$

11) [정답] ③

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$

이므로

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

이므로

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$

$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$

$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에서 $a_1 + 15 \ge 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$a_1 = -\frac{31}{2}$

따라서

$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$

$= -\frac{31}{2} + 27$

$= \frac{23}{2}$

12) [정답] ②

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하면 $a_4=4a_2$이므로

$$r^2=4,\ r=2$$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{13}\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$이므로

$$\frac{\frac{1}{5}(2^n-1)}{2-1}=\frac{3}{13}\times\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\{(2^2)^n-1\}}{2^2-1}$$

$$2^n+1=65$$

따라서 $n=6$

13) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\frac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a=\frac{63}{2}$이므로 $r\neq1$

$$\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$$

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$$

$$=ar\times ar^4\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$=a^2r^5\times\frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}$$

$$=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$$

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^4-1}$$

$$=\frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}$$

$$=\frac{r^4+r^2+1}{r^2+1}=\frac{189}{45}$$

이므로 $5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

$$5r^4-16r^2-16=0,\ (5r^2+4)(r^2-4)=0$$

$r>0$이므로 $r=2$

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=15a=45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3=3\times2^2=12$

14) [정답] ②

[해설]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}+b_{2n}=0$이고

$a_{2n+1}+b_{2n+1}=3(a_{2n-1}+b_{2n-1})$이다.

$$\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}b_n=\sum_{n=1}^{8}(a_n+b_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{4}(a_{2n-1}+b_{2n-1})$$

$$=\frac{(a_1+b_1)(3^4-1)}{3-1}$$

$$=80a_1=160$$

에서 $a_1=2$

따라서 $a_3+b_3=3(a_1+b_1)=12$

15) [정답] ①

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$$

$$=2\times10-3$$

$$=17$$

16) [정답] ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}a_k=8,\ \sum_{k=1}^{5}b_k=9$이므로 $\sum$의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$$

$$=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}4$$

$$=2\times8-9+4\times5$$

$$=27$$

17) [정답] ⑤

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=67,\ \sum_{k=1}^{10}a_k=4,\ \sum_{k=1}^{10}4=40$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=11$

18) [정답] ③

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k-1)=\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=5+2\times20-1\times10$

$=35$

19) [정답] 9

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=45 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$

즉, $\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}b_k-10\times\frac{1}{2}=14-5=9$

20) [정답] 221

[해설]

$$\sum_{n=1}^{10}a_n(2b_n-3a_n)=2\sum_{n=1}^{10}a_nb_n-3\sum_{n=1}^{10}a_n^2$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}a_nb_n-3\times10=16$$

$$\sum_{n=1}^{10}a_nb_n=23$$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n(6a_n+7b_n)=6\sum_{n=1}^{10}a_n^2+7\sum_{n=1}^{10}a_nb_m$$

$$=6\times10+7\times23=221$$

21) [정답] 29

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=2$

$\sum_{k=1}^{m}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{m}(a_k+m)=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}-a_k-m)$

$=\sum_{k=1}^{m}(2-m)$

$=m(2-m)$

$2m-m^2=240-360,\ m^2-2m-120=0$

$(m+10)(m-12)=0$에서 $m=-10$ 또는 $m=12$

m은 자연수이므로 $m=12$

$\sum_{k=1}^{12}(a_k+12)=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{12}12$

$=\frac{12(2a_1+11\times2)}{2}+12\times12=360$

$6(2a_1+22)+144=360$에서 $a_1=7$

따라서 $a_m=a_{12}=7+11\times2=29$

22) [정답] 12

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{a_8}{2}=6$

따라서 $a_8=12$

23) [정답] 13

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}ca_k=c\sum_{k=1}^{5}a_k=10c$이고, $\sum_{k=1}^{5}c=5c$이다.

그러므로

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

$10c = 65 + 5c$

$\therefore\ c = 13$

24) [정답] 22

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5) = 55$에서

$$3\sum_{k=1}^{5} a_k + 25 = 55, \qquad \sum_{k=1}^{5} a_k = 10$$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k) = 32$에서 $\quad \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = 32$

$$\begin{aligned} \therefore\ \sum_{k=1}^{5} b_k &= -\sum_{k=1}^{5} a_k + 32 \\ &= -10+32 \\ &= 22 \end{aligned}$$

25) [정답] 10

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2 = \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 10 = 50$$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 = 20$이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$

26) [정답] 61

[해설]

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 9$에서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 6$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_k+k) = \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} k = 6 + \frac{10\times 11}{2} = 61$

27) [정답] 55

[해설]

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5\times 6\times 11}{6} = 55$$

28) [정답] 2

[해설]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}(k^2-ak) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - a\sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{10\times 11\times 21}{6} - a\times\frac{10\times 11}{2} \\ &= 385 - 55a = 275 \end{aligned}$$

에서 $55a = 110$

따라서 $a = 2$

29) [정답] ④

[해설]

$$\sum_{k=1}^{9} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{9} 2k^2 + k$$

$= 2\times\frac{9\times 10\times 19}{6} + \frac{9\times 10}{2}$

$= 570 + 45 = 615$

30) [정답] 3

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a) = 4\sum_{k=1}^{10} k + 10a$

$= 4\times\frac{10\times 11}{2} + 10a$

$= 220 + 10a$

즉, $220 + 10a = 250$이므로

$10a = 30$

따라서

$a = 3$

31) [정답] 109

[해설]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{5}(k-1)^2 &= 7^2 + \sum_{k=1}^{5}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{5}(k-1)^2 \\ &= 49 + \sum_{k=1}^{5}\{(k+1)^2-(k-1)^2\} \\ &= 49 + 4\sum_{k=1}^{5} k = 49 + 4\times\frac{5\times 6}{2} = 109 \end{aligned}$$

32) [정답] 105

[해설]

$$\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2-1} = 31$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1}) = \frac{2 \times (3^5 - 1)}{3-1} = 242$$

이므로 주어진 부등식에서 $31 < n^2 < 242$이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7, 8, $\cdots$, 15이고 그 합은 $\frac{10 \times (6+15)}{2} = 105$이다.

33) [정답] ④

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{4}$이므로 $n = 12$를 대입하면

$$\frac{1}{a_{13}} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13} = -3$

34) [정답] ④

[해설]

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \log_2 \sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \log_2 \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \log_2 \frac{2\times 2}{3} + \log_2 \frac{2\times 3}{4} + \log_2 \frac{2\times 4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{2\times (m+1)}{m+2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left\{ \frac{2\times 2}{3} \times \frac{2\times 3}{4} \times \frac{2\times 4}{5} \times \cdots \times \frac{2\times (m+1)}{m+2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2}$$

이때 $\sum_{k=1}^{m} a_k = N$(N은 100 이하의 자연수)라 하면

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = N, \ \frac{2^{m+1}}{m+2} = 2^{2N}, \ 2^{m+1-2N} = m+2$$

이므로 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

$m \geq 1$이므로 $m = 2^l - 2$(l은 2 이상의 자연수)로 놓으면

$2^{m+1-2N} = m+2$에서

$$2^{2^l - 1 - 2N} = 2^l$$

즉, $2^l - 2N = l + 1$

이때 좌변이 짝수이므로 l은 홀수이고,

역으로 l이 2 이상인 홀수이면

$N = \frac{1}{2}(2^l - l - 1)$은 자연수이다.

$\frac{1}{2}(2^l - l - 1) \leq 100$에서 $2^l - l - 1 \leq 200$을 만족시키는 2이상의 홀수 l의 값은 3, 5, 7이다.

따라서 모든 m의 값은

$2^3 - 2$, $2^5 - 2$, $2^7 - 2$이고 그 합은

$6 + 30 + 126 = 162$

35) [정답] ②

[해설]

$\sqrt{3n+1} = x$, $\sqrt{3n-2} = y$라 하면

$\sqrt{9n^2 - 3n - 2} = \sqrt{(3n-1)(3n+2)} = xy$,

$6n - 1 = (3n-1) + (3n+2) = x^2 + y^2$,

$x^2 - y^2 = 3$이므로

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2 - 3n - 2} + 6n - 1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-2}}$$

$$= \frac{xy + x^2 + y^2}{x + y}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{3}$$

$$= \frac{(\sqrt{3n+1})^3 - (\sqrt{3n-2})^3}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{16} \frac{(\sqrt{3n+1})^3 - (\sqrt{3n-2})^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\{ (\sqrt{4})^3 - (\sqrt{1})^3 \} + \{ (\sqrt{7})^3 - (\sqrt{4})^3 \} + \cdots + \{ (\sqrt{49})^3 - (\sqrt{46})^3 \} \right]$$

$$= \frac{1}{3}(7^3 - 1^3)$$

$$= 114$$

36) [정답] 58

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$을 만족하므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$$

$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=4n+5$

즉, $\frac{4n-3}{a_n}=4n+5$이므로

$$a_n=\frac{4n-3}{4n+5}\ (\text{단, } n\ge 2)$$

$n=5$를 대입하면 $a_5=\frac{17}{25}$

$n=7$를 대입하면 $a_5=\frac{25}{33}$

$n=9$를 대입하면 $a_5=\frac{33}{41}$

$$\therefore a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$$

따라서 $p=41$, $q=17$이므로 $p+q=58$

37) [정답] 18

[해설]

$$2\sum_{n=1}^{6}(a_n-b_n)=56,\ \sum_{n=1}^{6}(a_n-b_n)=28$$

$$a_6-b_6=\sum_{n=1}^{6}(a_n-b_n)-\sum_{n=1}^{5}(a_n-b_n)$$

$=28-10=18$

38) [정답] ⑤

[해설]

(i) $n=1$; $S_1=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{1}{a_1}=2$

(ii) $n\ge 2$; $\frac{S_n}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=-\frac{n}{(n+1)!}$

$S_n=-\frac{n}{n+1}$

$n=2$이면 $a_2=S_2-a_1=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}$

$\therefore \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$

$n\ge 3$이면

$$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{a_n}=-n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$

$$=\frac{8}{7}+2+6-\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=\frac{64}{7}-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$$

$$\therefore f(n)=n,\ g(n)=\frac{1}{n(n+1)},\ h(k)=k^2$$

$$f(5)\times g(3)\times h(6)=5\times\frac{1}{12}\times 36=15$$

39) [정답] ⑤

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{10}S_k-S_{10}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}S_k+S_{10}-S_{10}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}S_k$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

[다른 풀이]

$S_n-a_n=S_{n-1}\,(n\ge 2)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\sum_{k=2}^{10}S_{k-1}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)k}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

40) [정답] 146

[해설]

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2k-1}=S_n$이라 하면 $S_n=2^n$

$$\frac{a_n}{2n-1}=S_n-S_{n-1}$$
$$=2^n-2^{n-1}$$
$$=2^{n-1}\ (\text{단, } n\geq 2)$$

$\therefore a_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1$이므로 $a_1=2^1=2$

$a_5=(2\cdot 5-1)\cdot 2^4=144$

$\therefore a_1+a_5=2+144=146$

41) [정답] ②

[해설]

$$\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)=\frac{4}{27}$$

42) [정답] ⑤

[해설]

$a_n={}^{n+1}\sqrt{{}^{n+2}\sqrt{4}}=\left(2^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{1}{n+1}}=2^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$ 이므로

$$\log_2a_k=\log_2 2^{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\log_2a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{6}$$

43) [정답] 160

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}a_k=55$에서 공차를 d라 하면

$$\frac{5\{2\times 3+4\times d\}}{2}=55$$

$$\therefore d=4$$

따라서 $a_n=4n-1$

$$\sum_{k=1}^{5}k(4k-1-3)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k)$$
$$=4\times\frac{5\times 6\times 11}{6}-4\times\frac{5\times 6}{2}$$
$$=160$$

44) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31}$$

45) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$$a_n=a+(n-1)\times a=an$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}&=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}\\&=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}\\&=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak})\\&=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\\&\quad\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}\\&=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})\\&=\frac{3\sqrt{a}}{a}\\&=\frac{3}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=2$에서 $\quad a=\dfrac{9}{4}$

$$\therefore\ a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$$

46) [정답] ①

[해설]

$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$에서 두 근을

$x=\alpha,\ x=\beta$라고 하면 $a_n=\alpha+\beta=\dfrac{n+5}{(n+1)(n+5)}=\dfrac{1}{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}(k+1)$$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\dfrac{10(1+10)}{2}+10$

$=65$

47) [정답] ③

[해설]

$2\le n\le 4$일 때, $n-5<0$이므로

$$f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0$$

$n=5$일 때, $n-5=0$이므로 $f(5)=1$

$6\le n\le 10$일 때, $n-5>0$이므로

$$f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=2,\ f(9)=1,\ f(10)=2$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=2}^{10}f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$

48) [정답] 525

[해설]

자연수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a<b$이고 조건 (나)에서 $a+b>c$이므로 $c\ge 4$이다.

(ⅰ) $c=2k\ (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$인 경우

$b=2k-1$일 때 $2\le a\le 2k-2$

$b=2k-2$일 때 $3\le a\le 2k-3$

$\vdots$

$b=k+1$일 때 $a=k$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$(2k-3)+(2k-5)+(2k-7)+\cdots+3+1$

$=\dfrac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2}$

$=(k-1)^2$

(ⅱ) $c=2k+1\ (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우

$b=2k$일 때 $2\le a\le 2k-1$

$b=2k-1$일 때 $3\le a\le 2k-2$

$\vdots$

$b=k+2$일 때 $k\le a\le k+1$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$(2k-2)+(2k-4)+(2k-6)+\cdots+4+2$

$=\dfrac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2}$

$=k(k-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2+\sum_{k=2}^{9}k(k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(k^2-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k)$$

$$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}$$

$=525$

49) [정답] 49

[해설]

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=1^3-3\times(-1)\times1=4$$

$$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3+\beta^3)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=4^2-2\times(-1)^3=18$$

(ⅰ) $k=1$일 때

$$a_3=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=\frac{1}{2}\times4=2$$

(ⅱ) $k=2$일 때

$$a_6=\frac{1}{2}(\alpha^6+\beta^6)=\frac{1}{2}\times18=9$$

(ⅲ) $k=3$일 때

$$a_9=\frac{1}{2}(\alpha^9+\beta^9)$$
$$=\frac{1}{2}\{(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^6+\beta^6)-\alpha^3\beta^3(\alpha^3+\beta^3)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{4\times18-(-1)\times4\}$$
$$=38$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\sum_{k=1}^{3}a_{3k}=a_3+a_6+a_9=2+9+38=49$$

50) [정답] ③

[해설]

2이상의 자연수 n에 대하여 $(2n-5)(2n-9)$의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 하면

(ⅰ) n이 홀수인 경우

$x=\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$ 이므로 $f(n)=1$

(ⅱ) n이 짝수인 경우

$(2n-5)(2n-9)<0$이면 실수 x는 존재하지 않으므로

$\frac{5}{2}<n<\frac{9}{2}$인 짝수 n에 대하여 $f(n)=0$

$(2n-5)(2n-9)>0$이면

$x=\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$

또는 $x=-\sqrt[n]{(2n-5)(2n-9)}$

이므로 $n<\frac{5}{2}$ 또는 $n>\frac{9}{2}$인 짝수 n에 대하여 $f(n)=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $2\le n\le8$인 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\begin{cases}0 & (n=4)\\ 1 & (n=3,\ 5,\ 7)\\ 2 & (n=2,\ 6,\ 8)\end{cases}$$

따라서 $\sum_{n=2}^{8}f(n)=0\times1+1\times3+2\times3=9$

51) [정답] ②

[해설]

$2\le n\le5$일 때, $2^{n-3}-8<0$이므로

$$f(n)=\begin{cases}1 & (n\text{은 홀수})\\ 0 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$n=6$일 때, $2^{6-3}-8=0$이므로 $f(6)=1$

$\sum_{n=2}^{6}f(n)=0+1+0+1+1=3<15$이므로 $m\ge7$

$n\ge7$일 때, $2^{n-3}-8>0$이므로

$$f(n)=\begin{cases}1 & (n\text{은 홀수})\\ 2 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

그러므로 $f(7)=1,\ f(8)=2,\ f(9)=1,\ f(10)=2,\ f(11)=1,$ $f(12)=2,\ f(13)=1,\ f(14)=2$에서

$$\sum_{n=2}^{14}f(n)=\sum_{n=2}^{6}f(n)+\sum_{n=7}^{14}f(n)=3+12=15$$

한편 $l\ge15$인 자연수 l에 대하여 $f(l)\ge1$이므로

$$\sum_{n=2}^{l}f(n)>15$$

따라서 $m=14$

52) [정답] ⑤

[해설]

집합 $A=\{(a,b)\,|\,a,\ b\text{는 자연수},\ 2\le a\le k,\ \log_a b\le2\}$에서

$a=n$일 때, $b\le n^2$이므로 (a,b)의 개수는 n^2이다.

따라서 $2\le a\le k$에서 집합 A의 원소의 개수는

$$\sum_{n=2}^{k}n^2=\sum_{n=1}^{k}n^2-1=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-1$$

집합 A의 원소의 개수가 54이므로

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=55$$

$k(k+1)(2k+1)=5\cdot6\cdot11$

따라서 $k=5$이다.

$a+b$의 최댓값은 $a=5,\ b=25$일 때이므로

$a+b+k$의 최댓값은 $5+25+5=35$이다.

[다른 풀이]

집합 $A=\{(a,b)\,|\,a,\ b\text{는 자연수},\ 2\le a\le k,\ \log_a b\le2\}$에서

$a=2,\ 3,\ \cdots,\ k$이고, $1 \le b \le a^2$이므로 경우를 나누어서 판단하면 다음과 같다.
(ⅰ) $a=2$일 때, $1 \le b \le 4$ 즉, 만족하는 순서쌍은 4개
(ⅱ) $a=3$일 때, $1 \le b \le 9$ 즉, 만족하는 순서쌍은 9개
(ⅲ) $a=4$일 때, $1 \le b \le 16$ 즉, 만족하는 순서쌍은 16개
(ⅳ) $a=5$일 때, $1 \le b \le 25$ 즉, 만족하는 순서쌍은 25개
그런데, 집합 A의 원소의 개수가 54이므로 $a=5$일 때 만족한다.
즉 $a=5,\ b=25,\ k=5$일 때가 최대가 되므로 $a+b+k$의 최댓값은 $5+25+5=35$이다.

53) [정답] 3

[해설]
$n \ge 2$에서 $n^2-17n+19k$의 값을 $g(n)$이라 하자.
(i) n이 홀수일 때, $n=2m+1$(m은 자연수)
$g(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로
$f(2m+1)=1$
(ii) n이 짝수일 때, $n=2m$(m은 자연수)
$g(2m)>0$이면 $f(2m)=2$
$g(2m)<0$이면 $f(2m)=0$
$g(2m)=0$이라 하면 $19k=2m(17-2m)$
이를 만족시키는 두 자연수 m과 k는 존재하지 않는다.
(i), (ii) 에 의하여

$$\sum_{n=2}^{19} f(n) = \sum_{m=1}^{9} f(2m) + \sum_{m=1}^{9} f(2m+1)$$

$$\sum_{m=1}^{9} f(2m) = 19-1\times9=10$$

$\sum_{m=1}^{9} f(2m) = 10$을 만족시키기 위해서는
$g(2m)>0$인 m의 개수가 5이어야 한다. ……㉠
$2 \le n \le 7$이면 $g(n)>g(n+1)$
$n=8$이면 $g(n)=g(n+1)$, 즉 $g(8)=g(9)$
$n \ge 9$이면 $g(n)<g(n+1)$
자연수 n에 대하여 $g(n)=g(17-n)$이므로
$g(18)>g(16)>g(15)=g(2)>g(14)>g(13)=g(4)$
$>g(12)>g(11)=g(6)>g(10)>g(9)=g(8)$
㉠을 만족시키는 경우는
$g(18)>g(16)>g(2)>g(14)>g(4)>0>g(12)$
$g(4)=4^2-17\times4+19k>0,\ 19k>52$
$g(12)=g(5)=5^2-17\times5+19k<0,\ 19k<60$
$\frac{52}{19}<k<\frac{60}{19}$
따라서 자연수 k는 3

54) [정답] ③

[해설]
m^{12}의 n제곱근 중 정수가 존재하기 위해서는

$$\sqrt[n]{m^{12}}=m^{\frac{12}{n}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 정수이어야 한다.
m의 값에 따라 2이상의 자연수 n의 개수는 m이 제곱수, 세제곱수인지에 따라서 다음과 같이 나눌 수 있다.
(ⅰ) $m=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7$일 때
n은 12의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로
$f(m)=5$
(ⅱ) $m=4,\ 9$일 때
$m=k^2\ (k=2,\ 3)$이라 하면 ㉠에서
$m^{\frac{12}{n}}=k^{\frac{24}{n}}$
따라서 n은 24의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로
$f(m)=7$
(ⅲ) $m=8$일 때
$m=2^3$이므로 ㉠에서
$m^{\frac{12}{n}}=2^{\frac{36}{n}}$
따라서 n은 36의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로
$f(8)=8$
이상에서

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{9} f(m) &= f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\\ &=5\times5+7\times2+8\\ &=47\end{aligned}$$

55) [정답] ③

[해설]
원의 중심 $(n,\ 0)$과 직선 $a_n(x+1)-y=0\,(a_n>0)$사이의 거리는 원 O_n의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|a_n(n+1)|}{\sqrt{a_n^2+(-1)^2}}=1,\ \ \{a_n(an+1)\}^2=a_n^2+1$$

$$a_n{}^2(n^2+2n)=1,\ \ a_n{}^2=\frac{1}{n(n+2)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{5} a_n{}^2 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{25}{42}$

56) [정답] 169

[해설]

$0\le x<2^{n+1}$일 때, $0\le\frac{\pi}{2^n}x<2\pi$이므로 부등식

$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\le-\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{2}{3}\pi\le\frac{\pi}{2^n}x\le\frac{4}{3}\pi$

즉, $\frac{2^{n+1}}{3}\le x\le\frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3}\le x\le\frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로 $\sum_{n=1}^{7}a_n$은 $\frac{2^2}{3}\le x\le\frac{2^9}{3}$이 자연수의 개수와 같다.

$$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots,\ \frac{2^9}{3}=170.666\cdots$$

따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=170-1=169$

[참고]

(ⅰ) $n=1$일 때, $\frac{2^2}{3}\le x\le\frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로

$a_1=1$

(ⅱ) $n=2$일 때, $\frac{2^3}{3}\le x\le\frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로

$a_2=3$

(ⅲ) $n=3$일 때, $\frac{2^4}{3}\le x\le\frac{2^5}{3}$인 자연수 x는

6, 7, 8, 9, 10이므로 $a_3=5$

(ⅳ) $n=4$일 때, $\frac{2^5}{3}\le x\le\frac{2^6}{3}$인 자연수 x는

11, 12, 13, $\cdots$, 21이므로 $a_4=11$

(ⅴ) $n=5$일 때, $\frac{2^6}{3}\le x\le\frac{2^7}{3}$인 자연수 x는

22, 23, 24, $\cdots$, 42이므로 $a_5=21$

(ⅵ) $n=6$일 때, $\frac{2^7}{3}\le x\le\frac{2^8}{3}$인 자연수 x는

43, 44, 45, $\cdots$, 85이므로 $a_6=43$

(ⅶ) $n=7$일 때, $\frac{2^8}{3}\le x\le\frac{2^9}{3}$인 자연수 x는

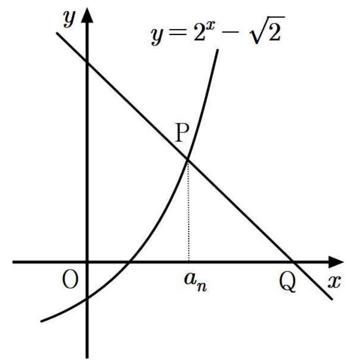
86, 87, 88, $\cdots$, 170이므로 $a_7=85$

57) [정답] ②

[해설]

점 $P(a_n,\ 2^{a_n}-\sqrt{2})$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y=-x+a_n+2^{a_n}-\sqrt{2}$$



따라서 점 Q는

$(a_n+2^{a_n}-\sqrt{2},\ 0)$

$\overline{PQ}=n$이므로

$$\sqrt{(2^{a_n}-\sqrt{2})^2+(2^{a_n}-\sqrt{2})^2}=n$$

$$\sqrt{2}\,(2^{a_n}-\sqrt{2})=n$$

따라서 $2^{a_n}-\sqrt{2}=\frac{n}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\times2^{a_n}=n+2$

$$2^{\frac{1}{2}+a_n}=n+2,\ \frac{1}{2}+a_n=\log_2(n+2)$$

$$\therefore a_n=\log_2(n+2)-\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{6}a_n=\log_2(3\times4\times\cdots\times8)-3$$

$=\log_2(2^6\times315)-3$

$=3+\log_2 315$

여기서 $2^8<315<2^9$이므로 $\log_2 315=8.\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{6}a_n$의 정수부분은 11이다.

58) [정답] ①

[해설]

로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)$과 직선 $x=n$이 한 점에서 만나므로

$\frac{m}{2}<n$ $\cdots\cdots$ ㉠

지수함수 $y=|2^{-x}-m|$와 직선 $y=n$이 두 점에서 만나므로

$$n<m \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $n<m<2n$

따라서 만족하는 자연수 m의 값의 합 a_n은

$$a_n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$$

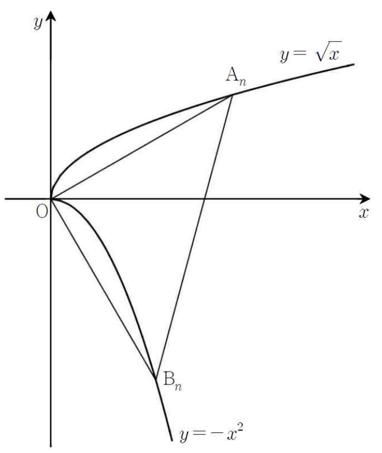
따라서 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3n(n-1)}$

$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=5}^{10}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$$

59) [정답] **395**

[해설]



위의 그래프에서 $\overline{OA_n}$의 기울기는 $\dfrac{1}{n}$, $\overline{OB_n}$의 기울기는 $-n$이므로 두 기울기는 수직이다.

또, $\overline{OA_n}=\overline{OB_n}$이므로 삼각형 OA_nB_n은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 OA_nB_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}(n^2+n^4)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{10}(1+n^2)$$
$$=10+\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21$$
$$=395$$

60) [정답] ②

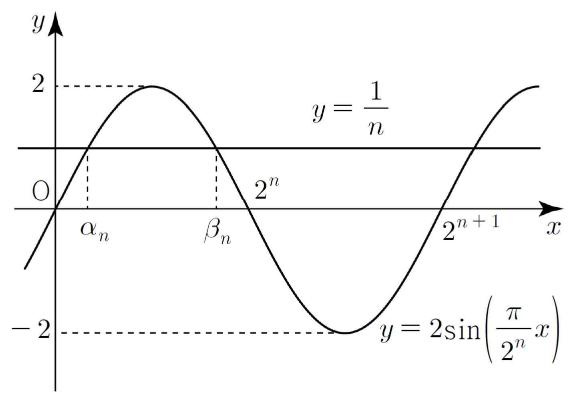
[해설]

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right)$라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2^n}}=2^{n+1}$,

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

자연수 n에 대하여 $0<\dfrac{1}{n}<2$이므로 $0\le x\le 2^{n+1}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{n}$은 서로 다른 두 점에서 만난다.



만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면

$\beta_n=2^n-\alpha_n$이므로 $x_n=\alpha_n+\beta_n=2^n$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}x_n=\sum_{n=1}^{6}2^n=\frac{2\times(2^6-1)}{2-1}=126$

61) [정답] ③

[해설]

$x^2=\sqrt{n}x$, $x(x-\sqrt{n})=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{n}$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 서로 다른 두 점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(\sqrt{n},\ n)$

$$\{f(n)\}^2=(\sqrt{n}-0)^2+(n-0)^2$$
$$=n+n^2=n(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\{f(n)\}^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

62) [정답] ⑤

[해설]

점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의

기울기는 $-\frac{1}{n}$이므로 직선의 방정식은

$y-n^2=-\frac{1}{n}(x-n)$, $y=\boxed{-\frac{1}{n}}\times x+n^2+1$

즉, $\boxed{(가)}=-\frac{1}{n}$

점 B_n의 좌표는 $-\frac{1}{n}x+n^2+1=0$에서 $(n^3+n, 0)$

점 A_n의 좌표는 (n, n^2)이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times(n^3+n)\times n^2=\boxed{\frac{n^5+n^3}{2}}$

즉, $\boxed{(나)}=\frac{n^5+n^3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^5+n^3}{2n^3}=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{1}{2}\times1\times8$$
$$=102+4=\boxed{106}$$

즉, $\boxed{(다)}=106$

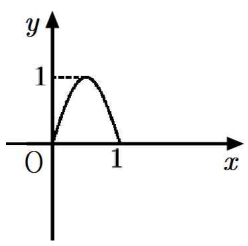
따라서 $f(n)=-\frac{1}{n}$, $g(n)=\frac{n^5+n^3}{2}$, $r=106$이므로

$f(1)+g(2)+r=-1+20+106=125$

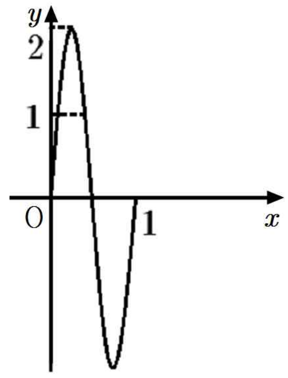
63) [정답] ⑤

[해설]

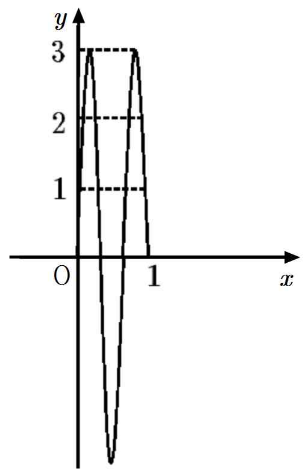
(ⅰ) $n=1$일 때, 1개



(ⅱ) $n=2$일 때, 3개



(ⅲ) $n=3$일 때, 10개



⋮

계속하여 규칙을 구하면

$n=1$일 때, 1개

$n=2$일 때, $1+2=3$개

$n=3$일 때, $2+4+4=10$개

$n=4$일 때, $2+4+4+4=14$개

$n=5$일 때, $3+6+6+6+6=3+(6\times4)=27$개

$n=6$일 때, $3+(6\times5)=33$개

$n=7$일 때, $4+(8\times6)=52$개

$n=8$일 때, $4+(8\times7)=60$개

$n=9$일 때, $5+(10\times8)=85$개

$n=10$일 때, $5+(10\times9)=95$개

⋮

$y=n\sin(n\pi x)$ $(0\le x\le1)$위의 점 중 y좌표가 자연수인

점의 개수를 a_n이라 하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=1+3+10+14+27+33+52+60+85+95$$
$$=380$$

64) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{P_nQ_n}=n-\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$, $\overline{Q_nR_n}=\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$이다.

$\overline{P_nQ_n}>\overline{Q_nR_n}$을 만족하는 n의 범위를 구하면

$n-\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)>\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$

$n > \frac{1}{10}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$

n은 자연수이므로

$1 > \frac{1}{10}\left(n+\frac{1}{3}\right)$, $n < 10-\frac{1}{3}$

$$\therefore a_n = \begin{cases} \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n} = \frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right) & (1 \le n \le 9) \\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = n - \frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right) & (n \ge 10) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right) + a_{10}$$

$$= \frac{1}{20}\times\frac{9\times10\times19}{6} + \frac{1}{60}\times\frac{9\times10}{2} + 10 - \frac{1}{20}\times10\left(10+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{119}{6}$$

65) [정답] ④

[해설]

두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각 $(n,\ 3a^n)$, $(n,\ 3a^{n-1})$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이 l_n은

$l_n = 3(a-1)\times a^{n-1}$이므로

$$L = \sum_{k=1}^{20} l_k = 3(a-1)\sum_{k=1}^{20} a^{k-1}$$

$= 3(a-1)\times\frac{a^{20}-1}{a-1} = 3\times\left(\boxed{a^{20}-1}\right)$이다.

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이 S_n은

$S_n = 3(a-1)\times(a^{n-1}+a^{n+1})$이므로

$$S = \sum_{k=1}^{5} S_{4k-3} = S_1+S_5+S_9+S_{13}+S_{17}$$

$= 3(a-1)(1+a^2+a^4+\cdots+a^{18})$

$= 3(a-1)\times\frac{(a^2)^{10}-1}{a^2-1}$

$= \frac{3}{\left(\boxed{a+1}\right)}\times\left(\boxed{a^{20}-1}\right)$이다.

따라서

$$\frac{S}{L} = \frac{\frac{3}{\left(\boxed{a+1}\right)}\times\left(\boxed{a^{20}-1}\right)}{3\times\left(\boxed{a^{20}-1}\right)}$$

$= \frac{1}{\left(\boxed{a+1}\right)} = \frac{2}{5}$

이므로 $a = \boxed{\frac{3}{2}}$이다.

따라서 $\frac{f(\sqrt{2})}{g(20p)} = \frac{1023}{31} = 33$

66) [정답] ①

[해설]

조건 (다)에서 k, m이 자연수이므로 $0 < a \le \frac{1}{2}$,

$0 < b \le \frac{1}{2}$를 만족한다. 따라서 조건 (나)에서 점 P와 점 $(a,\ b)$ 사이의 거리의 최솟값 $\frac{1}{2^n}$은 $\frac{1}{2^k}$ 또는 $\frac{1}{2^m}$과 같아야 한다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 다음과 같다.

(i) $k=n$일 때, $1 \le m \le n$이므로 n가지

(ii) $m=n$일 때, $1 \le k \le n$이므로 n가지

(iii) $k=m=n$일 때, 1가지

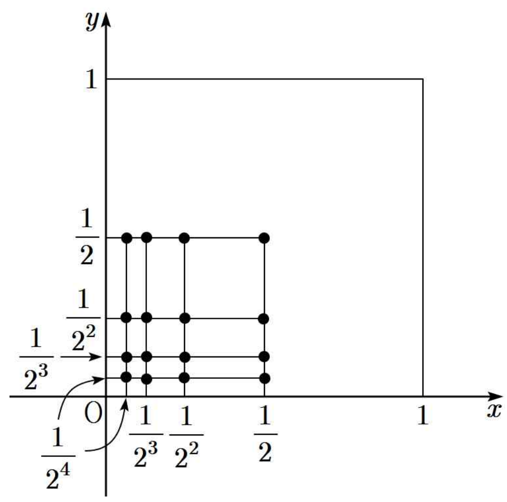
a_n의 값은 (i)+(ii)−(iii)이므로

$a_n = 2n-1$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(2n-1) = 100$$

[다른 풀이]

n의 값에 따라서 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하면 다음과 같다.



(i) $n=1$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

즉 집합 X_1의 원소의 개수를 $a_1 = 1$

(ii) $n=2$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로

$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

즉 집합 X_2의 원소의 개수를 $a_2 = 3$

(iii) $n=3$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점

P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{8}$이므로

$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$

즉 집합 X_3의 원소의 개수를 $a_2=5$

⋮

따라서 집합 X_n의 원소의 개수를 $a_n=2n-1$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(2n-1)=100$

67) [정답] 53

[해설]

$y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|k\{1-\cos^2(n\pi x)\}-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|1-k\cos^2(n\pi x)\right|$

$0\le x\le 2$에서 $t=\cos(n\pi x)$라 할 때,

함수 $f(t)=2t+\left|1-kt^2\right|(-1\le t\le 1)$이라 하자.

$1-kt^2=0$, $t=-\frac{1}{\sqrt{k}}$ 또는 $t=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$f(t)=\begin{cases} -kt^2+2t+1 & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ kt^2+2t-1 & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 또는 } \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right)\end{cases}$$

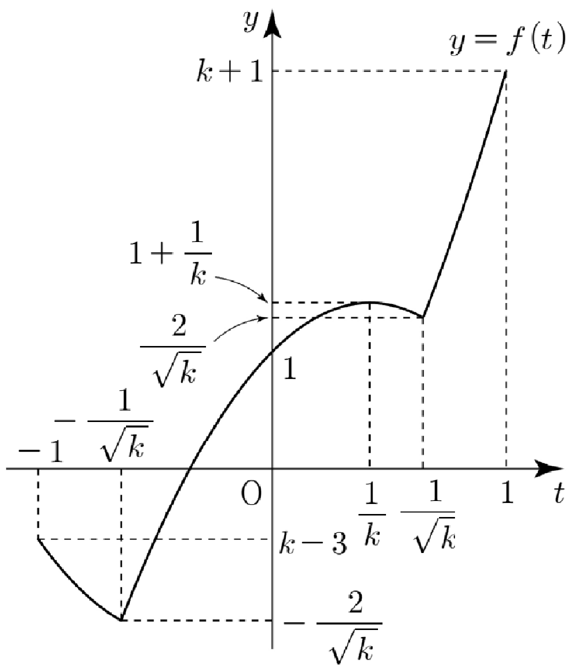
$$=\begin{cases} -k\left(t-\frac{1}{k}\right)^2+\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ k\left(t+\frac{1}{k}\right)^2-\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 또는} \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right)\end{cases}$$

$f(-1)=k-3$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{k}}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{k}}$, $f(1)=k+1$

$k\le 4$이므로 $1\le \frac{2}{\sqrt{k}}$

함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 a_2는

$f(t_0)=-\frac{k}{4}$인 실수 $t_0(-1\le t_0\le 1)$에 대하여

곡선 $t=\cos 2\pi x$와 직선 $t=t_0$이 만나는 서로 다른 점의

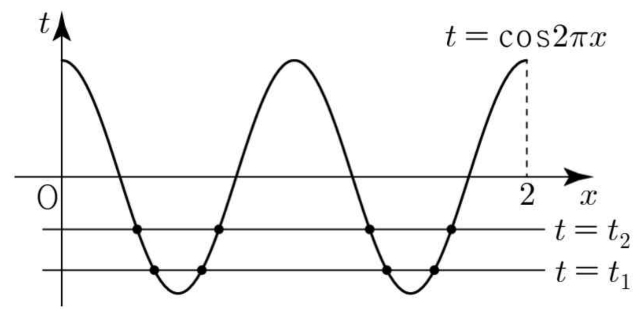
개수와 같다.

$\frac{12}{5}<k\le 4$에서 $-\frac{2}{\sqrt{k}}\le -\frac{k}{4}<k-3$

(I) $-\frac{2}{\sqrt{k}}<-\frac{k}{4}$인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$인 실수 t를

t_1, $t_2(-1<t_1<t_2<0)$이라 하면



$0\le x\le 2$에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos 2\pi x$와 두 직선 $t=t_1$, $t=t_2$가

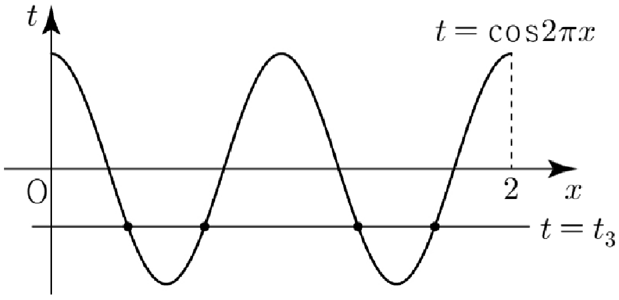
만나는 서로 다른 점의 개수 $a_2=(2+2)\times 2=8$

$0<a_2<6$을 만족시키지 않는다.

(II) $-\frac{2}{\sqrt{k}}=-\frac{k}{4}$인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$인 실수 t를

$t_3=-\frac{1}{\sqrt{k}}(-1<t_3<0)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos 2\pi x$와 직선 $t=t_3$이 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_2 = 2\times 2 = 4 \cdots\cdots$ ㉠

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$0 < a_2 < 6$을 만족시키는 k의 값은

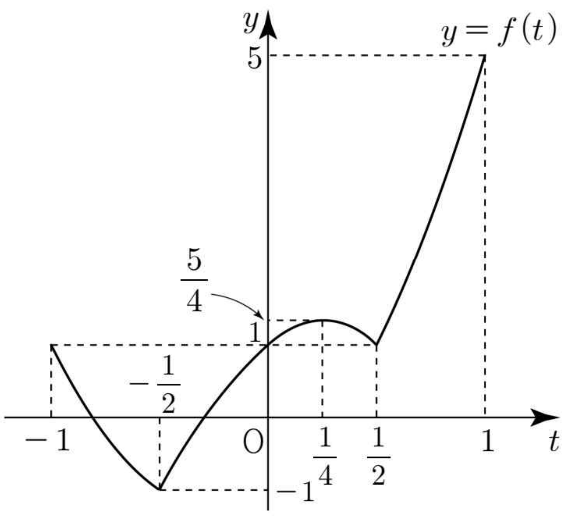
$-\dfrac{2}{\sqrt{k}} = -\dfrac{k}{4}$, $k=4$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$0 \le x \le 2$에서 $t = \cos(n\pi x)(-1 \le t \le 1)$일 때,

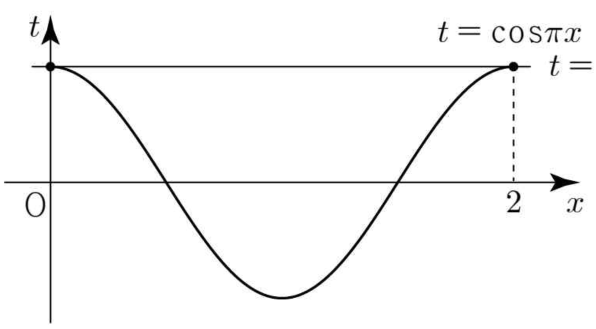
$$f(t) = \begin{cases} -4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{5}{4} & \left(-\dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{1}{2}\right) \\ 4\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{5}{4} & \left(-1 \le t < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} < t \le 1\right) \end{cases}$$

함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $n=1$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(t)=5$인 실수 t는 1



$0 \le x \le 2$에서

주기가 2인 곡선 $t=\cos \pi x$와

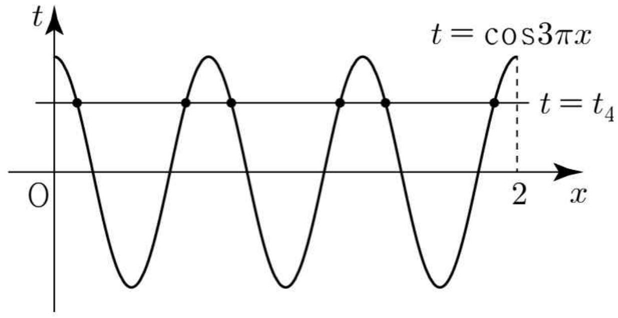
직선 $t=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_1 = 2$

(ii) $n=2$인 경우

㉠에 의하여 $a_2 = 4$

(iii) $n=3$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(t)=\dfrac{5}{3}$인 실수 t를 $t_4(0<t_4<1)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

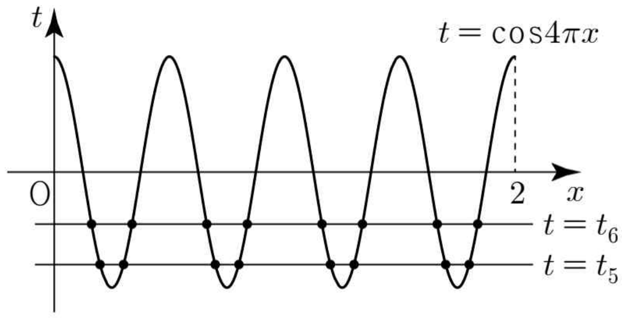
주기가 $\dfrac{2}{3}$인 곡선 $t=\cos 3\pi x$와

직선 $t=t_4$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_3 = 2\times 3 = 6$

(iv) $n=4$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(t)=-\dfrac{1}{2}$인 실수 t를

t_5, $t_6(-1<t_5<t_6<0)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

주기가 $\dfrac{1}{2}$인 곡선 $t=\cos 4\pi x$와

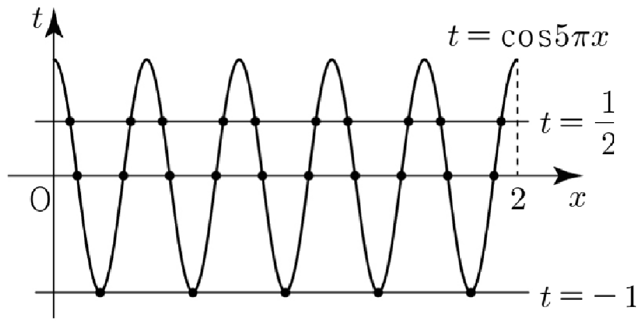
두 직선 $t=t_5$, $t=t_6$이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_4 = (2\times 4)\times 2 = 16$

(v) $n=5$인 경우

조건 (나)에 의하여

$f(t)=1$인 실수 t는 -1, 0, $\dfrac{1}{2}$



$0 \le x \le 2$에서

주기가 $\dfrac{2}{5}$인 곡선 $t=\cos 5\pi x$와

세 직선 $t=-1$, $t=0$, $t=\dfrac{1}{2}$이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_5=5+(2\times5)\times2=25$

(i)~(v)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=2+4+6+16+25=53$$

68) [정답] ④

[해설]

$$\sum_{k=1}^{20}(-1)^n n^2$$

$$=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-19^2+20^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(2n)^2-\sum_{k=1}^{10}(2n-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(4n-1)=4\times\frac{10\times11}{2}-10$$

[다른 풀이]

$$\sum_{k=1}^{20}(-1)^n n^2$$

$$=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots+(-19^2+20^2)$$

$$=(-1+2)\times(1+2)+(-3+4)(3+4)$$

$$+\cdots+(-19+20)\times(19+20)$$

$$=1+2+3+\cdots+20$$

$$=\frac{20\times21}{2}=210$$

69) [정답] 282

[해설]

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(n^2+cn)-(n-1)^2-c(n-1)$$

$$=2n-1+c$$

수열 $\{a_n\}$을 30 번째항까지 나열하면

$$1+c,\ 3+c,\ 5+c,\ \cdots,\ 55+c,\ 57+c,\ 59+c$$

(i) $c=3k$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 $c\neq3k$꼴이므로 성립하지 않는다.

(ii) $c=3k+1$인 경우

$b_{20}=57+c$이므로 $57+c=199$

$c=142$

따라서 성립한다.

(iii) $c=3k+2$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $b_{20}=199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합은 $142+140=282$

70) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$이고 $f(x+1)=f(x)$를 만족하므로

(i) $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 즉 $x=$(자연수)일 때, $f(x)=1$

(ii) $x\neq$(자연수)일 때, $f(x)=3$

또, $\sqrt{k}$가 자연수가 되려면 k는 완전제곱수이므로

$k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=1$

$k\neq1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}\{k\times f(\sqrt{k})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1\times1+4\times1+9\times1+16\times1)$$

$$+\frac{1}{3}(2\times3+3\times3+5\times3+\cdots+20\times3)$$

$$=10+(2+3+5+6+\cdots+20)$$

←(　)안에 1, 4, 9, 16이 빠짐

$$=10+(1+2+3+\cdots+20)-(1+4+9+16)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}k-20$$

$$=\frac{20\times21}{2}-20$$

$$=190$$

71) [정답] ⑤

[해설]

자연수 k에 대하여

$n=2k-1$일 때, $a_n=a_{2k-1}=\dfrac{\{(2k-1)+1\}^2}{2}=2k^2$

$n=2k$일 때, $a_n=a_{2k}=\dfrac{(2k)^2}{2}+2k+1=2k^2+2k+1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{5}2k^2+\sum_{k=1}^{5}(2k^2+2k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(2k^2+2k+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+2k+1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+1\times5$$

$$=255$$

72) [정답] ④

[해설]

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$ $S_7=T_7$이므로

7이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\ge0$ ……㉠

조건 (나)에 의하여

6이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$

$a_{n+1}\le0$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0\le a_7\le0$이므로 $a_7=0$ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서

$a=12$, $d=-2$

$\therefore a_n=14-2n$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$\therefore S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-S_{15}=114$

73) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

등차중항의 성질에 의하여 $a_6+a_8=2a_7$

조건(가)에 의하여 $a_7=2a_7$, $a_7=0$

(i) $d>0$인 경우

$n\ge7$인 자연수 n에 대하여

$S_n+T_n<S_{n+1}+T_{n+1}$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $d=0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$이므로

$S_n+T_n=0$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $d<0$이고,

$a_7=a+6d=0$, $a=-6d>0$이므로

7 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$, $S_7=T_7$

조건(나)에 의하여 $S_7=T_7=42$

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=-21d=42$

$a=12$, $d=-2$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

74) [정답] ②

[해설]

$a_1=-45<0$이고 $d>0$이므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$a_m<0$, $a_{m+3}>0$

즉, $-a_m=a_{m+3}$에서 $a_m+a_{m+3}=0$

따라서

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)=0$

$(2m+1)d=90$ …… ㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90=2\times3^2\times5$이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2}>-100$

$n\{-90+(n-1)d\}>-200$ …… ㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은 $18+30=48$

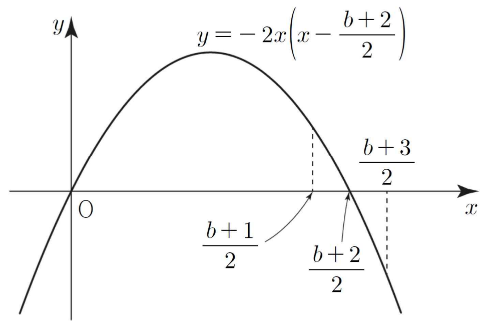
75) [정답] ④

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.
모든 자연수 n에 대하여 $|S_n|=|b|\geq 14$
b가 자연수이므로 $b\geq 14$

$$S_n=\frac{n\{2b+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$
$=-n(2n-b-2)$
$=-2n\left(n-\frac{b+2}{2}\right)$

(ⅰ) b가 짝수인 경우
$S_{\frac{b+2}{2}}=0$이 되어 조건 $|S_n|\geq 14$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) b가 홀수인 경우
함수 $y=-2x\left(x-\frac{b+2}{2}\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$|S_n|\geq 14$이므로 $S_{\frac{b+1}{2}}\geq 14$, $S_{\frac{b+3}{2}}\leq -14$를 동시에 만족시켜야 한다.

$$S_{\frac{b+1}{2}}=-2\times\frac{b+1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\geq 14$$
$b\geq 27$ …… ㉠
$$S_{\frac{b+3}{2}}=-2\times\frac{b+3}{2}\times\frac{1}{2}\leq -14$$
$b\geq 25$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b\geq 27$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$b_1=27$, $b_2=29$, $b_3=31$, $\cdots$이므로
$b_m=2m+25$ (m은 자연수)
따라서
$$\sum_{m=1}^{10}b_m=\sum_{m=1}^{10}(2m+25)$$
$=2\times\frac{10\times 11}{2}+250$
$=360$

76) [정답] ③

[해설]
$a_n=a+(n-1)d$, $b_n=a+(n-1)(-2d)$
조건 (가)에서 $|a|=|a-12d|$
$a=a-12d$ 또는 $a=-a+12d$
$d\neq 0$이므로 $a=-a+12d$, $a=6d$
$a_n=6d+(n-1)d=(n+5)d$
$b_n=6d-2(n-1)d=(-2n+8)d$
a는 양수이므로 $d>0$
모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$
$1\leq n\leq 3$일 때, $b_n>0$
$n\geq 4$일 때, $b_n\leq 0$이므로
수열 $\{c_n\}$을 $c_n=|a_n|-|b_n|$이라 하면
$$c_n=\begin{cases}(n+5)d-(-2n+8)d & (1\leq n\leq 3)\\(n+5)d-(2n-8)d & (n\geq 4)\end{cases}$$
$$c_n=\begin{cases}3(n-1)d & (1\leq n\leq 3)\\(13-n)d & (n\geq 4)\end{cases}$$
$1\leq n\leq 13$일 때 $c_n\geq 0$이고 $c_{13}=0$
$n\geq 14$일 때 $c_n<0$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-|b_k|)=\sum_{k=1}^{n}c_k$의 값이 최대가 되는 $n=12$ 또는 $n=13$

$$S_{12}=S_{13}=\sum_{n=1}^{13}c_n$$
$$=\sum_{n=1}^{3}3(n-1)d+\sum_{n=4}^{13}(13-n)d$$

수열 $\{c_n\}$은
$$c_n=\begin{cases}6(n-1) & (1\leq n\leq 3)\\2(13-n) & (n\geq 4)z\end{cases}$$
$c_1=0$, $c_2=6$, $c_3=12$
$c_4=-c_{22}$, $c_5=-c_{21}$, $c_6=-c_{20}$, $\cdots$,
$c_{12}=-c_{14}$, $c_{13}=0$,
$c_{23}=-20$,
$n\geq 24$에서 $c_n<0$이므로
$S_{22}=(c_1+c_2+c_3)+(c_4+c_5+c_6+\cdots+c_{22})$
$=(0+6+12)+0=18$
$S_{23}=S_{22}+c_{23}=18+(-20)=-2$
$n\geq 23$일 때 $S_n<0$
따라서 $S_n\geq 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값 $m=22$이고 $a_{22}=(22+5)\times 2=54$

77) [정답] **164**

[해설]

직선 AB의 방정식은

$$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$$

자연수 a에 대하여 $x=a$일 때

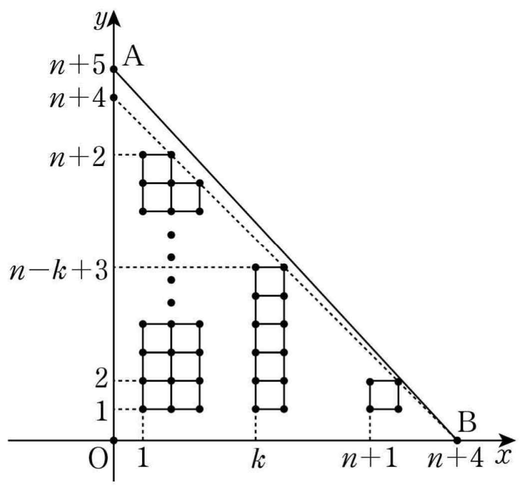
$$y=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5$$

$=m+5-\left(1+\dfrac{1}{n+4}\right)a$

$=n+5-a-\dfrac{a}{n+4}$

$0<a<n+4$일 때, $0<\dfrac{a}{n+4}<1$이므로 $x=a$일 때,

y좌표가 자연수인 점의 개수는 $n+4-a$이다.



두 자연수 a, b에 대하여 삼각형 OAB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(a+1,\ b)$, $(a+1,\ b+1)$, $(a,\ b+1)$이라 하면

$a=1$일 때, $1\le b\le n+1$이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$이다.

$a=2$일 때, $1\le b\le n$이므로 정사각형의 개수는 n이다.

$a=3$일 때, $1\le b\le n-1$이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$이다.

$\vdots$

$a=n+1$일 때, $b=1$이므로 정사각형의 개수는 1이다.

따라서

$$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$$

$=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$=\dfrac{1}{2}(n^2+3n+2)$

$$\sum_{k=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(n^2+3n+2)$$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8\times9\times17}{6}+3\times\dfrac{8\times9}{2}+2\times8\right)$

$=164$

78) [정답] ⑤

[해설]

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 점 $\mathrm{B}(c,\ d)$가

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n이하의 자연수이므로

$b<\dfrac{n}{2}$이다.

$\dfrac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수

a의 개수는 $n-2k$이다.

2이상의 자연수 m에 대하여

(ⅰ) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는

1부터 $\boxed{m-1}$까지이므로

$$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{m-1}}(2m-2k)$$

$=2m(m-1)-m(m-1)$

$=\boxed{m^2-m}$

(ⅱ) $n=2m+1$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 m까지이므로

$$T_{2m+1}=\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$$

$=m(2m+1)-m(m+1)$

$=\boxed{m^2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\displaystyle\sum_{n=4}^{20}T_m=614$

따라서 $f(m)=m-1$, $g(m)=m^2-m$, $h(m)=m^2$

이므로 $f(5)+g(6)+h(7)=4+30+49=83$