P PL

M ATH

L AB

주간지

2주차
미분계수와 도함수

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과

주간지 소개

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$
(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a,b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[2021학년도 고3 3월 12번]

2.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[2021학년도 고3 7월 19번]

3.

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x) = x^2 f(x)$에 대하여 $g'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[2015학년도 사관학교 나형 22번]

4.

함수 $f(x) = x^2 - 6x + 5$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = 8$을 만족하는 상수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[2010학년도 고3 7월 가형 4번]

5.

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

[2015학년도 9월 A형 21번]

6.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x-2}=3, \quad \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}=1$$

이 성립할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2014학년도 시관학교 나형 6번]

7.

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$ 일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$ 의 값은? 〔3점〕

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[2012학년도 6월 나형 11번]

8.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때, $\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$의 값은?

〔3점〕

① -8 ② -4 ③ 4 ④ 8 ⑤ 12

[2010학년도 6월 가형 6번]

9.

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0 \le x<1) \\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x \ge 1) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? 〔3점〕

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2007학년도 대수능 가형 7번]

10.

다음과 같이 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2} & (x<1) \\ -x^2+4x & (x \geqq 1) \end{cases}$$

가 있다. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르면? 〔4점〕

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다..

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2004학년도 사관학교 가나형 17번]

STEP 2

11.

함수 $f(x)=x|x|+|x-1|^3$ 에 대하여 $f'(0)+f'(1)$의 값은? 〔4점〕

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[2013학년도 고3 3월 가형 19번]

12.

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. 〔4점〕

[2021학년도 6월 나형 26번]

13.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

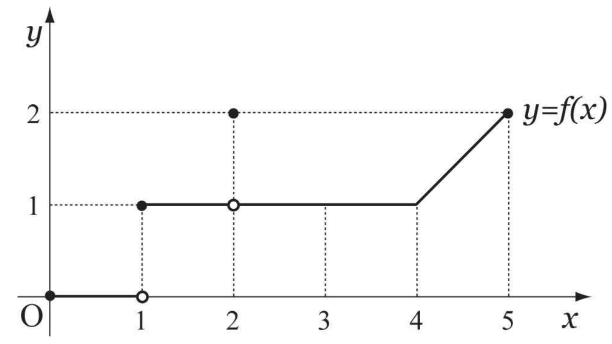
를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

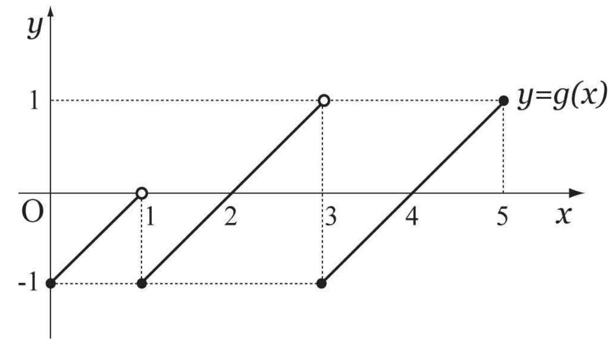
① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

[2021학년도 대수능 나형 17번]

14.

그림과 같이 구간 $[0, 5]$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]





〈보 기〉

ㄱ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

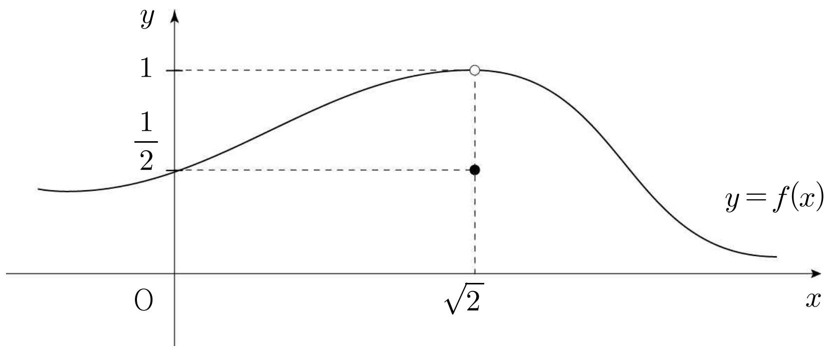
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2010학년도 고3 7월 가형 9번]

15.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) 〔4점〕



〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x \to \sqrt{2}} [xf(x)]=1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2013학년도 7월 가형 11번]

16.

두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? 〔3점〕

[2022학년도 고3 10월 7번]

17.

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

[2016학년도 고3 3월 가형 28번]

18.

이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? 〔3점〕

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \to 2} g(x)=f'(2)$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$

ㄷ. $x>2$일 때, $g(x)<f'(x)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2012학년도 사관학교 나형 11번]

19.

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]

[2017학년도 6월 나형 29번]

20.

다항함수 $f(x)$와 두 자연수 $m,\ n$이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $m \ge n$

ㄴ. $ab \ge 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2009학년도 대수능 가형 11번]

21.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x) = f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x)$이다.

옳은 것만을 〔보기〕에서 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕

< 보 기 >

ㄱ. $f(-1) = f(1)$ 이고 $f'(-1) = f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $f'(0)f'(1) < 0$ 이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1) > 0$이면, 구간 $(-\infty, \ -1)$에 $f'(c) = 0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2010학년도 대수능 가형 17번]

22.

이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $x = 3$에 대하여 대칭일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

〔3점〕

< 보 기 >

ㄱ. $y = f(x)$에서 x의 값이 -1에서 7까지 변할 때의
평균변화율은 0이다.
ㄴ. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a) + f'(b) = 0$이다.
ㄷ. $\sum_{k=1}^{15} f'(k-3) = 0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2006학년도 9월 가형 7번]

23.

함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}$ 에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{p}$ 일 때, $q-p$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔3점〕

① 508 ② 509 ③ 510 ④ 511 ⑤ 512

[2011학년도 고3 7월 가형 8번]

24.

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{\,a\,|\,$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

[2011학년도 대수능 가형 24번]

25.

다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 도함수이고, $h(x)$는 $g(x)$의 도함수라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$이 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라. [4점]

[2012학년도 사관학교 나27]

26.

정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x \le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

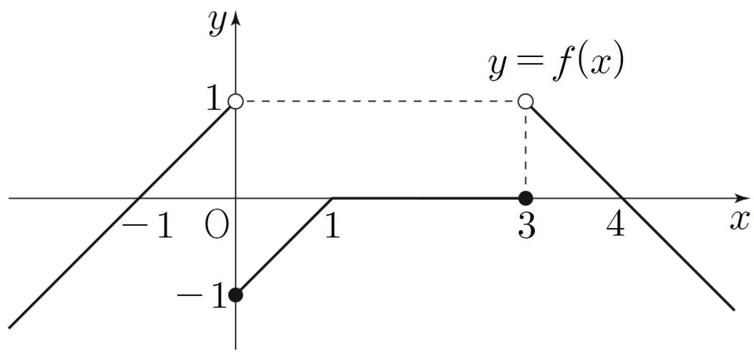
〈 보 기 〉

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[2022학년도 고3 4월 14번]

27.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2023학년도 사관학교 14번]

28.

두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2022학년도 6월 14번]

29.

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[2013학년도 대수능 나형 18번]

30.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다. (나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

[2019학년도 대수능 나형 21번]

정답 및 해설

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	③	11번	②	21번	③
2번	24	12번	3	22번	③
3번	28	13번	①	23번	④
4번	①	14번	⑤	24번	147
5번	①	15번	③	25번	24
6번	③	16번	③	26번	④
7번	①	17번	13	27번	②
8번	①	18번	⑤	28번	③
9번	③	19번	186	29번	③
10번	⑤	20번	⑤	30번	①

1. ③

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, 분모$\to0$ 이므로 분자 $\to0$이다.

즉, $f(1)=g(1)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)-g(x)-g(1)}{x-1}=5$

즉, $f'(1)-g'(1)=5$

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1}=7$

즉, $f'(1)+g'(1)=7$이 된다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$ 일 때,

분모 $\to0$ 이므로 분자 $\to0$이다.

즉, $a=f(1)$이고 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f(1)=g(1)$ 이므로, $f'(1)=b\times f(1)=ab$

위 조건들을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$

따라서 $ab=6$

2. 24

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서

분모$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 분자$\to0$ 이다.

$\lim\limits_{x\to2}f(x)-4=0$이므로 $f(2)=4$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{1}{4}f'(2)=2$

즉 $f'(2)=8$이다.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=8$에서

분모$\to0$이고 극한값이 존재하므로 분자$\to0$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)+1=0$이므로 $g(2)=-1$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

3.28

함수 $f(x)$가 다항함수이고, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=4$이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$이고 $f'(2)=4$이다.

$g(x)=x^2f(x)$이므로

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\therefore\ g'(2)=2\cdot2f(2)+2^2f'(2)=4\cdot3+4\cdot4=28$

4. ①

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=2f'(a)=8 \qquad \therefore\ a=5$

5. ①

조건 (나)에서 $x=1$을 대입하면
$0 \le f(1) \le 0$이므로, $f(1)=0$
$x=1$에서
각 함수 $6x-6$과 $2x^3-2$의 미분계수를 판단하면
좌미분계수와 우미분계수가 모두 6이므로
$f'(1)=6$임을 알 수 있다.
함수 $6x-6$보다는 항상 크거나 같고,
함수 $2x^3-2$보다는 항상 작거나 같아야 하므로
$f(x)$는 일차이상, 삼차이하의 다항함수여야 한다.
따라서 다항함수 $f(x)$가 조건 (가)와 (나)를 만족시키기 위해서는 $f(0)=-3$, $f(1)=0$, $f'(1)=6$ 을 만족시키는 삼차이하의 다항함수여야 함을 알 수 있다.
$f(x)$를 일차 또는 이차 함수라고 가정했을 때 해당 조건을 모두 만족시키는 함수는 존재하지 않으므로
$f(x)=x^3+x^2+x-3$이 됨을 알 수 있다.
즉 $f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

6. ③
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x+2}=3$에서 $f(2)=-1$, $f'(2)=3$이고
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=1$에서 $g(2)=3$, $g'(x)=1$이다.
$h(x)=f(x)g(x)$라 하면
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$
$=h'(2)$
$=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$
$=3\cdot3+(-1)\cdot1$
$=8$

7. ①
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$일 때,
x가 1에 가까워질 때, 분모가 0에 가까이 가므로, 분자도 0으로 가까이 가고, $f(x)$가 다항함수가 다항함수이므로,
$f(1)=2$
$f(x)$가 다항함수라서 미분이 가능하므로, 도함수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형하면,
$\lim_{x\to1}(\frac{f(x)-2}{x-1})(\frac{1}{x+1})=f'(1)\times\frac{1}{2}=3$
그러므로 $f'(1)=6$
따라서 구하고자 하는
$\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$이 된다.

8. ①
y축 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$이다.
양변을 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$
$\therefore$ $f'(-2)=3$, $f'(-4)=-6$
$\lim_{x\to-2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\times\frac{f(x^2)-f(4)}{x-(-2)}$
$=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}\times(x-2)=\frac{f(4)}{f'(-2)}\times(-4)=-8$

9. ③
$f(x)=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ x^2-1 & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge1)\end{cases}$
ㄱ. $\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(1+h)^2-0}{h}=2$
$\lim_{h\to+0}\frac{\frac{2}{3}((1+h)^3-1)-0}{h}=2$
$\therefore$ $f'(1)$은 존재하고 미분가능하다. (참)
ㄴ. $\lim_{h\to-0}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|1-h|-1}{h}=-1$
$\lim_{h\to+0}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h^2-1|-|(-1)|}{h}=0$
$\therefore$ $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분 불가능하다. (거짓)
ㄷ. $\lim_{h\to-0}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h^k(1-h)}{h}=\lim_{h\to-0}h^{k-1}(1-h)$
$\lim_{h\to+0}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to+0}h^{k-1}(h^2-1)$
$\lim_{h\to-0}h^{k-1}(1-h)=\lim_{h\to+0}h^{k-1}(h^2-1)=0$
에서 $k\ge2$이므로 ㄷ은 참이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10. ⑤
$f_1(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$, $f_2(x)=-x^2+4x$ 라 두면
$f_1{}'(x)=x+1$ $(x<1)$, $f_2{}'(x)=-2x+4$ $(x\geqq1)$
ㄱ. $f(1)=f_1(1)=f_2(1)=3$ 이고, $\lim_{x\to1}f(x)=3$
$\lim_{x\to1-}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to1+}(-x^2+4x)=3$이므로
$\therefore$ $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$ 이므로 연속이다. (참)
ㄴ. $f'(1)=2$ 이므로 미분가능이다.
$f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$ 이므로 (참)
ㄷ. $f'(1)=f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$ 이고 $\lim_{x\to1}f'(x)=2$
$\lim_{x\to1-}(x+1)=\lim_{x\to1+}(-2x+4)=2$이므로
$\therefore$ $f'(1)=\lim_{x\to1}f'(x)$ 이므로 연속이다. (참)

11. ②
$g(x)=x|x|$, $h(x)=|x-1|^3$ 으로 놓으면
두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$도 실수 전체에서 미분가능하다.
$g'(0)=0$, $h'(1)=0$이고
$x>0$일 때 $g(x)=x^2$,
$x<1$일 때 $h(x)=-(x-1)^3$이므로

$f'(0)=0+h'(0)=-3(0-1)^2=-3$
$f'(1)=g'(1)+0=2\cdot1=2$
$\therefore\ f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$
〔다른풀이1〕
$f(x)=x|x|+|x-1|^3$에서 $f(0)=1,\ f(1)=1$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-h^3+4h^2-3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(-h^2+4h-3)=-3$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^3+2h^2-3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h^2+2h-3)=-3$$
$\therefore\ f'(0)=-3$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^3+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h^2+h+2)=2$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^3+h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h^2+h+2)=2$$
$\therefore\ f'(1)=2$
$\therefore\ f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$
〔다른풀이2〕
$$f(x)=\begin{cases}x^2+(x-1)^3 & (x\ge1)\\ x^2-(x-1)^3 & (0\le x<1)\\ -x^2-(x-1)^3 & (x<0)\end{cases}$$
이므로
$$f'(x)=\begin{cases}2x+3(x-1)^2 & (x>1)\\ 2x-3(x-1)^2 & (0<x<1)\\ -2x-3(x-1)^2 & (x<0)\end{cases}$$
$\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=2\cdot0-3(0-1)^2=-3$
$\lim\limits_{x\to0-}f'(x)=-2\cdot0-3(0-1)^2=-3$
$\therefore\ f'(0)=-3$
$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=2\cdot1+3(1-1)^2=2$
$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=2\cdot1-3(1-1)^2=2$
$\therefore\ f'(1)=2$
이상에서 $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

12. 3
함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}=a^2-3a+5$$
또, $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로
$f'(2)=12-12+5=5$
따라서 $a^2-3a+5=5$에서 $a(a-3)=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$
$a>0$이므로 $a=3$

13. ①
$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서
$f(0)+g(0)=0$이고 $f'(0)+g'(0)=3$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $f(0)=-3$이고 $f'(0)+g'(0)=3$이므로
$g(0)=3,\ \frac{f'(0)}{g(0)}=2,\ f'(0)=6,\ g'(0)=-3$
$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=6\times3-3\times-3=27$

14. ⑤
ㄱ. $\frac{g(2)}{f(2)}=0,\ \lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ (참)
ㄴ. $g(f(1))=-1,\ \lim\limits_{x\to1}g(f(x))=-1$(참)
ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (3\le x<4)\\ x-3 & (4\le x\le5)\end{cases}$,
$g(x)=x-4\ (3\le x\le5)$
$f(x)g(x)=\begin{cases}x-4 & (3\le x<4)\\ (x-3)(x-4) & (4\le x\le5)\end{cases}$
$$\lim_{x\to4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$$

15. ③
ㄱ. $\lim\limits_{x\to\sqrt2}[xf(x)]=1$ (참)
ㄴ. $g(x)=[xf(x)]$라 하면, $g(\sqrt2)=0,\ \lim\limits_{x\to\sqrt2}g(x)=1$ 이므로
$[xf(x)]$는 $x=\sqrt2$에서 불연속이다. (거짓)
ㄷ. $\lim\limits_{x\to\sqrt2}\frac{(x-\sqrt2)[xf(x)]-0}{x-\sqrt2}=1$ (참)

16. ③
$$f(x)g(x)=\begin{cases}-(x+3)(2x+a) & (x<-3)\\ (x+3)(2x+a) & (x\ge-3)\end{cases}$$
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x=-3$에서 미분가능하다. 즉,
$$\lim_{x\to-3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3},$$
$$\lim_{x\to-3-}(-2x-a)=\lim_{x\to-3+}(2x+a)$$
따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

17. 13
다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선

$x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$

$$=-3k^2+2k+9$$

또, $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$$=3k^2-2k-9$$

$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 이므로

$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$

$3k^2-2k-9=0$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

〔참고〕

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

18. ⑤

$f_1(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$, $f_2(x)=-x^2+4x$ 라 두면

$f_1{}'(x)=x+1$ $(x<1)$, $f_2{}'(x)=-2x+4$ $(x\geqq 1)$

ㄱ. $f(1)=f_1(1)=f_2(1)=3$ 이고,

$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to 1+}(-x^2+4x)=3$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=3$

$\therefore$ $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$ 이므로 연속이다. (참)

ㄴ. $f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$ 이므로

$f'(1)=2$ 이므로 미분가능이다. (참)

ㄷ. $f'(1)=f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$ 이고

$\lim_{x\to 1-}(x+1)=\lim_{x\to 1+}(-2x+4)=2$이므로

$\lim_{x\to 1}f'(x)=2$

$\therefore$ $f'(1)=\lim_{x\to 1}f'(x)$ 이므로 연속이다. (참)

19. 186

두 점 A$(-1,-1)$, B$(1,2)$로부터 거리가 같은 점들의 자취는

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ 와 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 각각

$x=-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$ 이므로 $g(x)$와 $g'(x)$는 다음과 같이 구해진다.

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+6x+5 & (x<-\frac{3}{10})\\ 2x^2-4x+2 & (-\frac{3}{10}<x<1)\\ 5x^2-10x+5 & (1<x<\frac{21}{8})\\ 5x^2-18x+26 & (x>\frac{21}{8})\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}4x+6 & (x<-\frac{3}{10})\\ 4x-4 & (-\frac{3}{10}<x<1)\\ 10x-10 & (1<x<\frac{21}{8})\\ 10x-18 & (x>\frac{21}{8})\end{cases}$$

$x=-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$ 에서 미분가능하지 않으므로 $80p=186$

20. ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^m이다.

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로 $m=a$이다.

한편, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$의 계수가 0이 아닌 항 중 차수가 가장 낮은 항은 bx^n이다.

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로 $bn=9$이다.

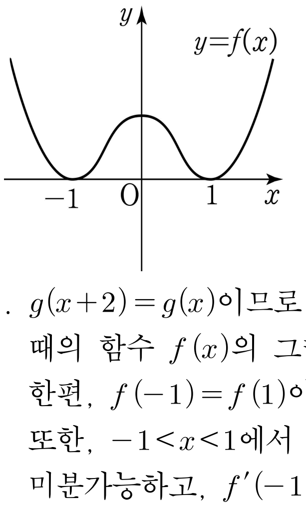
ㄱ. $f(x)$의 최고차항이 x^m이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n이므로 $m\geq n$ (참)

ㄴ. $m=a$, $bn=9$이므로 $ab=m\times\frac{9}{n}\geq 9$ $(\because\ m\geq n)$ (참)

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $m=a=3$, $bn=9$이므로 $am=bn$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. ③



ㄱ. $g(x+2)=g(x)$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 $-1\leq x<1$일 때의 함수 $f(x)$의 그래프가 주기적으로 반복된다.

한편, $f(-1)=f(1)$이므로 함수 $g(x)$는 연속이다.

또한, $-1<x<1$에서 $f(x)$는 다항함수이므로 미분가능하고, $f'(-1)=f'(1)$이므로 실수 전체의 집합에서

미분가능하다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$이라 하면

$f(-1)=f(1)=0$, $f'(-1)=f'(1)=0$이므로

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만

$f'(0)f'(1)=0$ (거짓)

ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$f'(1)>0$이므로 $f'(-1)>0$

한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$이므로 사잇값 정리에 의하여

구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. ③

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=p(x-3)^2+q$ (단, $p\neq0$)로 놓으면

ㄱ. $f(-1)=f(7)$

$\therefore\ \dfrac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=2p(x-3)$ 이고

$a+b=6$에서 $b=6-a$이므로

$f'(a)=2p(a-3)$

$f'(b)=f'(6-a)=-2p(a-3)$

$\therefore\ f'(a)+f'(b)=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해

$\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)$

$=f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+\cdots+f'(12)$

$=f'(-2)+f'(8)+f'(-1)+f'(7)$

$+f'(0)+f'(6)+f'(1)+f'(5)$

$+f'(2)+f'(4)+f'(3)$

$+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=0+0+0+0+0+0+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=2p(9-3)+2p(10-3)+2p(11-3)+2p(12-3)$

$=60p\neq0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23. ④

$f(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$ 이다.

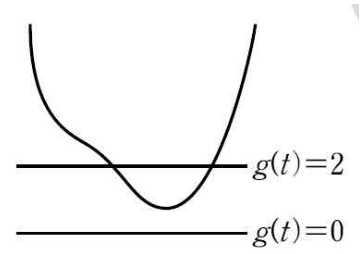
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$$

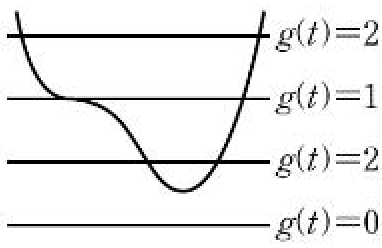
$$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$$

$\therefore\ q-p=1023-512=511$

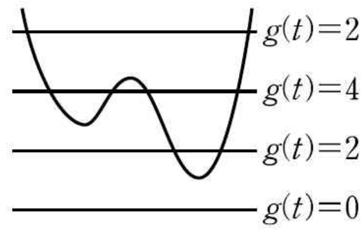
24. 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

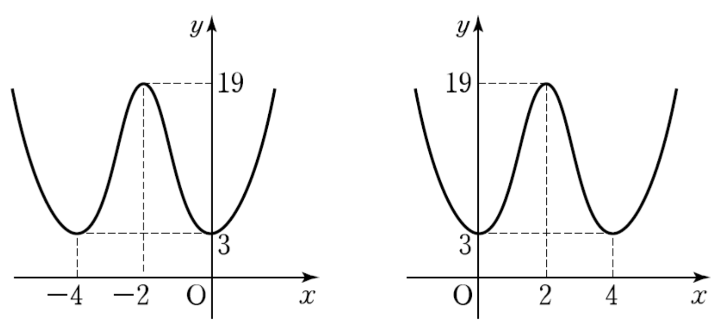
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$



$f(x)=x^2(x-4)^2+3$, $f(-2)=4\times36+3=147$

25. 54

$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=h(x)$

$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$에서

좌변 $f(x)+h(x)$의 최고차항은 $f(x)$의 최고차항과 같고 $g(x)$의 차수는 $f(x)$보다 작으므로 우변 $2g(x)+x^4+1$의 최고차항은 x^4이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항이 x^4인 사차함수이다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$g(x)=f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$h(x)=g'(x)=12x^2+6ax+2b$

이고

$f(x)+h(x)=x^4+ax^3+(b+12)x^2+(6a+c)x+2b+d$ …… ㉠

$2g(x)+x^4+1=x^4+8x^3+6ax^2+4bx+2c+1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면

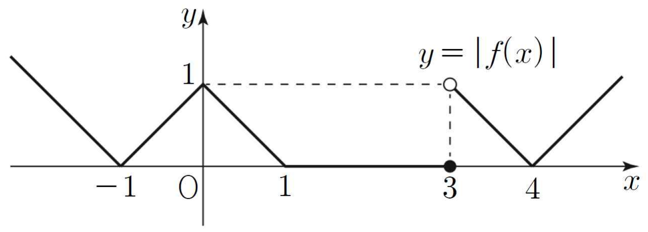
$a=8$, $b+12=6a$, $6a+c=4b$, $2b+d=2c+1$

$\therefore\ a=8,\ b=36,\ c=96,\ d=121$

$\therefore\ f(-1)=1-a+b-c+d=1-8+36-96+121=54$

26. ④

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} |f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-} f(x)\neq f(0)$

$k\neq-3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 $-4,\ -2,\ -1,\ 1$

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

27. ②

$g(x)=2f(1)-f(x)$를 정리하면 $\dfrac{g(x)+f(x)}{2}=f(1)$

$f(x)$와 $g(x)$가 $y=f(1)$에 대하여 대칭임을 의미한다.

ㄱ. 연속인 함수의 일부를 대칭시켰고 경계점에서 연속이므로 연속이다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$g(-1)=f(-1)=3$이고

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-3+g(-1-h)-3}{h}$$

$=\lim_{x\to -1+} g'(x)-\lim_{x\to -1-} g'(x)=0$이므로 $a=0$

$g(1)=f(1)=1$이므로 $f(x)=x^2-x+1$

ㄷ. ㄴ과 마찬가지로 $g(b)=3$이고

$\lim_{x\to b+} g'(x)-\lim_{x\to b-} g'(x)=4$

$t\neq 1$에서 $\lim_{x\to t+} g'(x)-\lim_{x\to t-} g'(x)=0$이므로

$\lim_{x\to b+} g'(x)-\lim_{x\to b-} g'(x)=4$일 가능성이 있는 b는 1뿐이다.

그러면 $g(1)\equiv f(1)=3$이고 $-f'(1)-f'(1)=4$이므로

$f'(1)=-2$

$f(x)=x^2+mx+n$이라 하면 $m+n=2$, $2+m=-2$이므로

$m=-4$, $n=6$이고

$g(4)=6-f(4)=6-6=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

28. ③

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

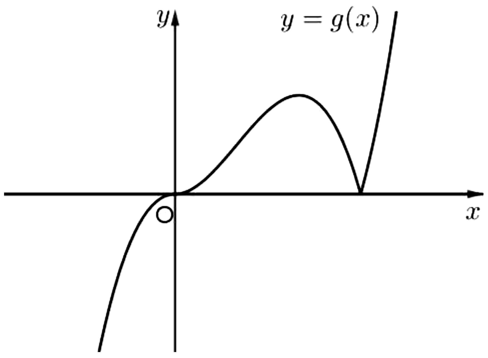
$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여

대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1$, $q=7$이어야 한다. 따라서

$p+q=1+7=8$



29. ③

주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$1+a=b+1+1$ …… ㉠

또한 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$3+a=2b+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=4$, $b=3$

따라서 $a+b=7$

30. ①

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x)=x(x+3)$

이고 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$, $f(0)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

이때,

$g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$ 에서

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{b}$

또, $g(0)=1$ 이므로 $b=3$

이때 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

함수 $g(x)$가 실수전체 집합에서 연속이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다. 그러므로

$D=a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ … ㉠

한편, $f(1)$이 자연수이므로

$f(1)=1\times(1^2+a+3)=a+4$

에서 $a+4$가 자연수이어야 하므로 $a>-4$이고 a는 정수이다.

㉠에서 a의 값은 -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3 이다.

한편 $g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$이고

$a=3$일 때, 이 값은 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.