2016학년도 9월 평가원 A형 해설지

D&T 수학연구소 제작
조민성
안정혁
조기강
전의영
공민석

1. $2\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=2\times3=6$

2. $2A+B=\begin{pmatrix}4&2\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\4&2+a\end{pmatrix}$

$2+a=7$ 이므로 $\therefore a=5$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{6\times2^n+1}{2^n}=6$

4. (모든 성분의 합)=2× (변의 개수)

5. $\lim_{x\to7}(x+3)=10$

6. $\mathrm{E}(X)=-4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}=4$

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=12$

7. $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$a_7=a_1+\sum_{k=1}^{6}b_k$

$\therefore\sum_{n=1}^{6}b_n=a_7-a_1=48$

8. $\lim_{x\to-0}f(x)=2$ 이고, $\lim_{x\to1+0}f(x)=3$ 이므로

$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=5$ 이다.

9. $a_4-a_2=4$ 이므로 $d=2$

$\therefore a_n=4+2(n-1)=2n+2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$

10. $f(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+1\quad(\because f(0)=1)$

$\therefore f(4)=13$

11.

$X\sim N(45,8^2)$

$\overline{X}\sim N(45,2^2)$

$P(44\le\overline{X}\le47)=P(-0.5\le Z\le1)$
$=0.1915+0.3414=0.5328$

12.

점 A와 B는 각각 $\mathrm{A}=(1,0)$, $\mathrm{B}=(3,0)$ 이고, 점 P와 Q는 각각 $\mathrm{P}(k,\log_2k)$, $\mathrm{Q}(k,\log_2(k-2))$ 로 둘 수 있다.

점 P와 R의 중점이 점 Q이므로

$\frac{1}{2}\log_2k=\log_2(k-2)$ 이다.

$(k-2)^2=k$

$k^2-4k+4=k$

$k=4\quad(\because k>2)$

사각형 ABQP의 넓이는 삼각형 ARP의 넓이에서 삼각형 BRQ의 넓이를 뺀 것과 같고

$\triangle\mathrm{ARP}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$,

$\triangle\mathrm{BRQ}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$ 이므로 사각형 ABQP의 넓이는 $\frac{5}{2}$ 이다.

13.

함수 $f(x)$ 가 삼차함수 이므로 함수 $g(x)=f(x)-kx$ 또한 삼차함수이다.

삼차함수 $g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 극값을 가지므로 $g'(-3)=0$ 이다.

$g'(-3)=f'(-3)-k=8-k$

$\therefore k=8$

14.

도함수 $f'(x)$ 를 적분하여 $f(x)$ 를 구하면 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ 이다.

$(\because f(0)=0)$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분을 그래프로 표시하면 다음과 같다.

$\therefore\int_{-\sqrt3}^{0}f(x)\,dx+\left(-\int_0^{\sqrt3}f(x)\,dx\right)=\frac{3}{2}$

15. 확률

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$

16.

두 열차 A,B 가 지점 P를 통과할 때의 속력을 각각 v_A, v_B라 하자.

$L_A=80+28\log\frac{v_A}{100}-14\log\frac{75}{25}$

$L_B=80+28\log\frac{v_B}{100}-14\log\frac{75}{25}$

$L_A-L_B=28\log\frac{v_B}{v_A}$ $\quad\quad \because (v_A=0.9\times v_B)$

$=28\log\frac{1}{0.9}$

$=28(1-2\log 3)$

$=28-56\log 3$

17.

$S_{n+1}=S_n+b_{n+1}$ 이므로

$S_n+b_{n+1}=$ (가) $\times S_n$ 이다.

$\therefore$ (가) $=\frac{S_n+b_{n+1}}{S_n}=1+\frac{b_{n+1}}{b_{n+1}\cdot n}=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$ 이므로

$S_n=10\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}=10n$ 이다.

$\therefore$ (나) $=10n$

$f(5)\times g(6)=\frac{5}{6}\times 60=72$

18.

ㄱ. $(AB-B^2)B=B$

$AB^2-B^3=B$

$AB^2=B^2+B=E$ (참)

ㄴ. $(A-B)B=B(B-A)=E$이므로 $AB=BA$ (참)

ㄷ. $B(B^2+E)=E \quad \therefore B^{-1}=B^2+E$

$AB=B^2+E$의 양변에 B의 역행렬을 곱하면

$A=(B^2+E)^2=B^4+2B^2+E=B^2+B+E$

$(\because B^4+B^2=B)$ 이다.

$\therefore A-B^2=B+E$ (거짓)

19.

1) $d=0$ 일 때, $a+b+c=10$ 이므로 (나) 조건을 만족시키지 못한다.

2) $d=1$ 일 때, $a+b+c=7$ 이므로 (나) 조건을 만족시키지 못한다.

3) $d=2$ 일 때, $a+b+c=4 \quad \therefore {}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

4) $d=3$ 일 때, $a+b+c=1 \quad \therefore {}_3H_1=3$

20.

직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 과 이차함수 $y=3x(x-1)$ 의 그래프의 교점 중 $x=1$ 을 제외한 나머지 교점의 x 좌표는

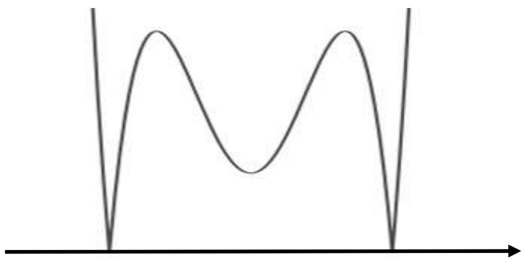
$x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

$\therefore \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)\right)$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{14}{9}$

21.



두 함수를 $g(x)$와 $h(x)$로 두었을 때,

점 A와 점 B사이의 거리 $f(t)$는

$f(t)=|g(t)-h(t)|$이다.

$g(x)-h(x)=x^4-4x^3+8x-32=(x+2)(x-4)(x^2-2x+4)$

$g'(x)-h'(x)=4x^3-12x^2+8=4(x-1)(x^2+2x-2)$

$g(x)-h(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$을 만족하는 경우는 극점인 경우이다.

만족하는 t의 값은 $t=-2,\ 1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4$이다.

22.

$3\times a\times r^4 = a\times r^6$

$\Leftrightarrow r^2 = 3$

따라서 $a_3 = 4\times 3 = 12$

23.

$f'(x) = 2x - 2$

$\therefore f'(5) = 8$

24.

첫 번째 행렬에 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬을 곱하여 정리하면

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

따라서 $a = 16$이다.

25.

양변을 x에 관하면 미분을 하면

$f'(x) = 2ax + 1$이다.

$f'(2) = 4a + 1 = 17$

따라서 $a = 4$이다.

26.

이용자 300명 중 30대가 차지하는 비율이

12%이므로 $60 - a + b = 36$ … ①

임의로 선택한 1명이 남성일 때, 이용자가 20대 일 확률은

$\frac{a}{200}$이고,

임의로 선택한 1명이 여성일 때, 이용자가 30대 일 확률은

$\frac{b}{100}$이다.

따라서 $\frac{a}{200} = \frac{b}{100}$ … ②

①식과 ②식을 연립하면 $a = 48$, $b = 24$

27.

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n} - bn\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right\}$

극한값을 가지기 위해서는 $a = b^2$이다.

위 식을 분모의 최고차항인 n으로 분자와 분모를 나누면

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}\right) = \frac{4}{2b} = \frac{1}{5}$이므로

$b = 10$, $a = 100$이다.

28. (가) 조건에 의하여 $f(x)$는 최고차항이 x^3인 식이고,

이차항이 없으며 일차항의 계수가 6인 함수이다.

따라서 함수를 $f(x) = x^3 + 6x + a$라 두면

(나) 조건에 의하여 a가 -7이라는 것을 알 수 있다.

$f(2) = 2^3 + 6\times 2 - 7 = 13$

29.

$$\sum_{n=1}^{7} \mathrm{P}(X\le n) = \mathrm{P}(X\le 1) + \mathrm{P}(X\le 7) + \mathrm{P}(X\le 2) + \mathrm{P}(X\le 6) + \mathrm{P}(X\le 3) + \mathrm{P}(X\le 5) + \mathrm{P}(X\le 4)$$

로 바꾸어 쓰면

$\mathrm{P}(X\le 1) + \mathrm{P}(X\le 7) + \mathrm{P}(X\le 2) + \mathrm{P}(X\le 6) + \mathrm{P}(X\le 3) + \mathrm{P}(X\le 5) + \mathrm{P}(X\le 4)$

을 구하는 것이다.

$\mathrm{P}(X\ge 7) + \mathrm{P}(X\le 7) = 1$

$\mathrm{P}(X\ge 6) + \mathrm{P}(X\le 6) = 1$

$\mathrm{P}(X\ge 5) + \mathrm{P}(X\le 5) = 1$

따라서 $a = 3.5 = \frac{7}{2}$

30.
먼저 $k=1$일 때를 보자.
$p(2)$는 $f(m)\le f(2)=0$이므로 자연수 m은 한자리이다.
$g(h(m))=g(m+5f(m))=g(m)$이다. 따라서 $g(m)\le g(2)$이므로
$m=1,2$이다. 즉, $p(2)=2$
$k=4$까지는 $f(m)\le 0$이므로 자연수 m은 한자리이다.
$g(h(m))=g(m+5f(m))=g(m)$이다.
즉 $g(m)\le g(2k)$ (단, $k=1,2,3,4$)
이므로 $m=2k$개 이다.
$$\sum_{k=1}^{4}p(2k)=\sum_{k=1}^{4}2k=2\times\frac{4\times5}{2}=20$$

이제 $k\ge5$인 경우를 보자.
$f(m)\le f(10)=1$이므로 m은 한자리 자연수이거나 두 자리 자연수이다.
즉, $f(m)=0$ 또는 $f(m)=1$이다.
1) $f(m)=0$인 경우, 즉 $1\le m\le 9$
$g(h(m))=g(m+5f(m))=g(m)\le g(2k)$

2) $f(m)=1$인 경우, 즉 $10\le m\le 99$
$g(h(m))=g(m+5f(m))=g(m+5)\le g(2k)$
이다.

$k=5$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(10)=0$ 이므로 $m=1$
2) 경우
$g(m+5)\le g(10)$ 이므로 $m=95$
즉, $p(10)=2$
$k=6$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(12)$ 이므로 $m=1$
2) 경우
$g(m+5)\le g(12)$ 이므로 $m=95,96,97,98,99$
즉, $p(12)=6$
$k=7$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(14)$ 이므로 $m=1$
2) 경우
$g(m+5)\le g(14)$ 이므로 $m=95,96,97,98,99$
즉, $p(14)=6$
$k=8$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(16)$ 이므로 $m=1$
2) 경우
$g(m+5)\le g(16)$ 이므로 $m=10,\ 11$
$95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$
즉, $p(16)=8$

$k=9$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(18)$ 이므로 $m=1$
2) 경우
$g(m+5)\le g(18)$ 이므로 $m=10,\ 11,\ 12,\ 13$
$95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$
즉, $p(18)=10$

$k=10$인 경우
1) 경우
$g(m)\le g(20)$ 이므로 $m=1,\ 2$
2) 경우
$g(m+5)\le g(20)$ 이므로 $m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$
$95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$
즉, $p(20)=13$

이므로 $\sum_{k=5}^{10}p(2k)=45$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{10}p(2k)=65$