A. 로그함수의 그래프: 좌표평면(직선의 기울기)

▶ 기출 문제 p.31

두 개 이상의 직선의 기울기의 대소 관계에 관련된 문제들을 풀어보자.

예제 1

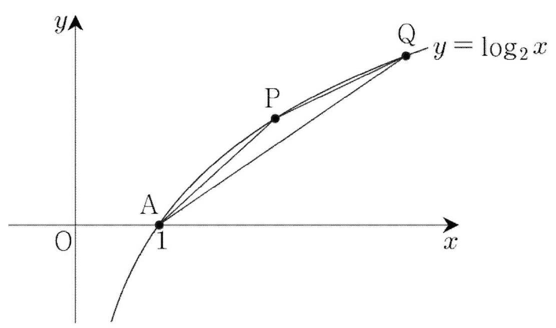
로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 $1<p<q$일 때, 세 수

$$\frac{\log_2 p}{p-1},\ \frac{\log_2 q}{q-1},\ \frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$$

의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ \log_2 p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_2 q)$를 생각하자.



$\dfrac{\log_2 p}{p-1}=$(두 점 A, P를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q}{q-1}=$(두 점 A, Q를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}=$(두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}<\frac{\log_2 q}{q-1}<\frac{\log_2 p}{p-1}$$

답 풀이 참조

곡선 $y=\log_2 x$가 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이므로 위의 부등식이 성립하는 것이다.

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제는 부등식의 성질과 자주 내적 연계된다.

• 부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

❶ $a>b$, $b>c$이면 $\quad a>c$

❷ $a>b$이면 $\quad a+c>b+c$, $a-c>b-c$

❸ $a>b$, $c>0$이면 $\quad ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

❹ $a>b$, $c<0$이면 $\quad ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

다음의 필요충분조건이 성립함을 알 수 있다.

양수 a, b, c, d에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$ $(\because$ ❸$)$ $\quad\cdots$㉠

양수 a, b, d와 음수 c에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$ $(\because$ ❹$)$ $\quad\cdots$㉡

증명

㉠$(\Rightarrow)$:

양변을 $bc(>0)$로 나누면

$\dfrac{ab}{bc}>\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$

㉠$(\Leftarrow)$:

양변에 $bc(>0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

㉡$(\Rightarrow)$:

양변을 $bc(<0)$로 나누면

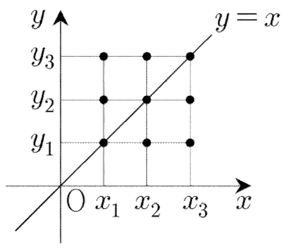
$\dfrac{ab}{bc}<\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$

㉡$(\Leftarrow)$:

양변에 $bc(<0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

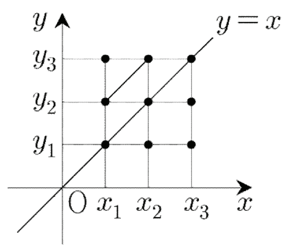
좌표평면 위에 아래 그림과 같이 9개의 점이 있다고 하자.



(단, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$)

다음과 같은 등식들이 성립한다.

- 평행:

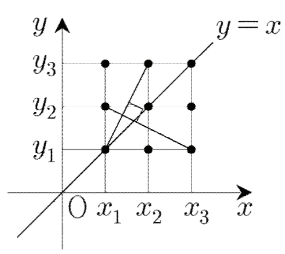


$$\frac{y_3-y_2}{x_2-x_1}=1$$

(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선과 직선 $y=x$는 서로 평행하다.)

이때, 위의 등식과 등식 $y_3-y_2=x_2-x_1$(두 선분의 길이가 같다.)는 필요충분조건이다.

- 수직:



$$\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\times\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

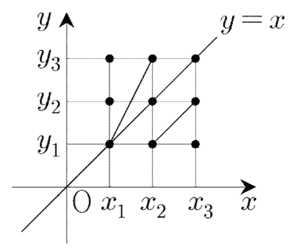
(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_3,\ y_1)$을 잇는 직선과 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선은 서로 수직이다.)

다음의 부등식이 성립한다. (두 직선의 기울기가 모두 음수일 때, 대소 관계를 주의하자!)

- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 양수인 경우

$$\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}>\frac{y_2-y_1}{x_3-x_2}$$

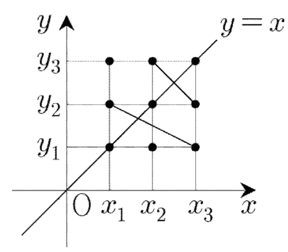
$\Leftrightarrow (y_3-y_1)(x_3-x_2)>(y_2-y_1)(x_2-x_1)$



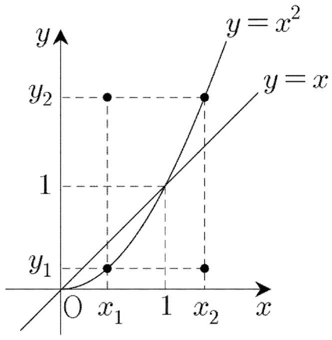
- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 음수인 경우

$$\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}<\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}$$

$\Leftrightarrow (y_2-y_3)(x_3-x_1)<(y_1-y_2)(x_3-x_2)$



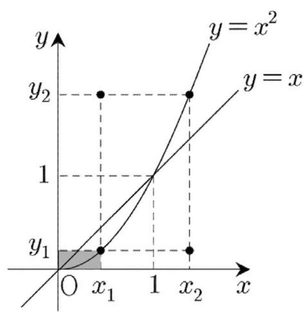
아래의 예를 생각해보자.

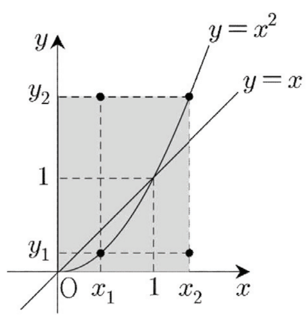


위의 그림에서 아래의 부등식이 성립한다.

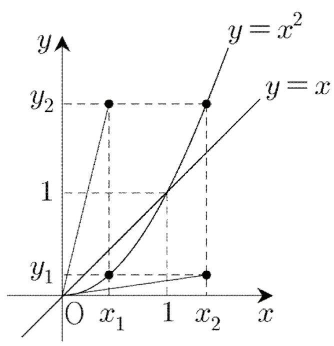
$x_1y_1 < x_2y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)





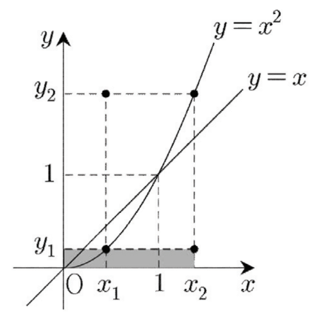
위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_1y_1 < x_2y_2$이다.

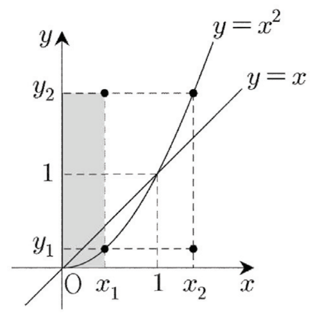


위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$이다.

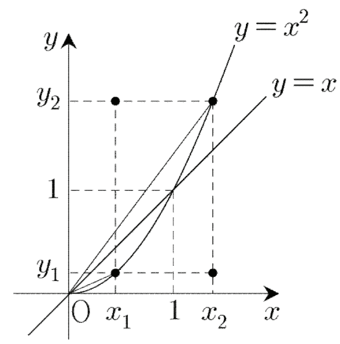
$x_2y_1 < x_1y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)



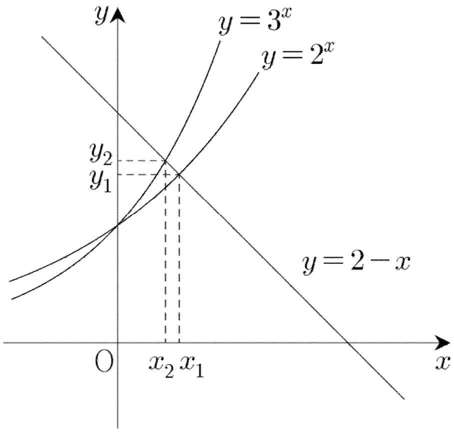


위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_2y_1 < x_1y_2$이다.



위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$이다.

직선 $y=2-x$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 두 교점의 좌표가 아래 그림과 같다고 하자.



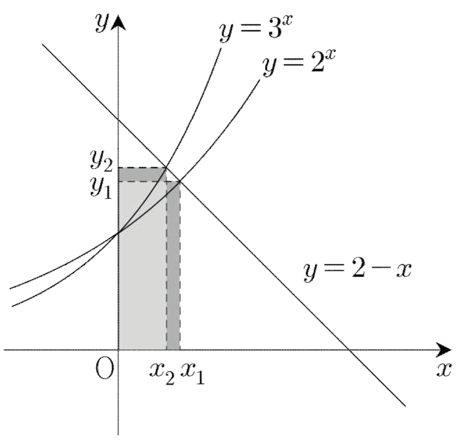
다음이 등식과 부등식이 성립한다.

교점: $0 < x_2 < x_1 < 2$, $1 < y_1 < y_2 < 2$

기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ $(\Leftrightarrow x_1-x_2=y_2-y_1)$

기울기 대소 비교: $\dfrac{y_1}{x_1}<\dfrac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow x_2y_1 < x_1y_2$

$x_1y_1 > x_2y_2$(넓이) $\Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$(기울기)



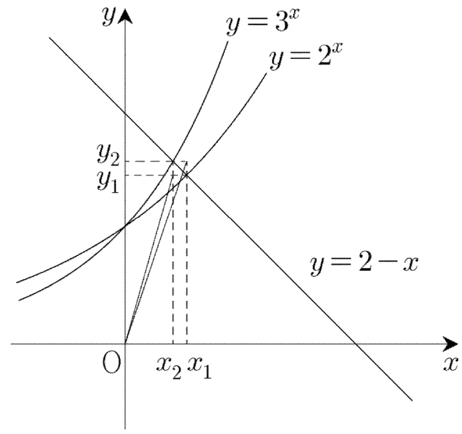
위의 그림에서 두 직사각형의 공통부분의 넓이를 제외한 나머지 두 직사각형의 넓이는 각각

$y_1(x_1-x_2)$, $x_2(y_2-y_1)$

이다. 이때, $x_1-x_2=y_2-y_1$

이므로 $y_1(x_1-x_2)>x_2(y_2-y_1)$

그러므로 $x_1y_1>x_2y_2$



위의 그림에서 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$

임을 알 수 있다.

이 문제의 경우 두 직사각형의 넓이의 대소관계가 두 직선의 기울기의 대소관계보다 명확하게 보인다.

- **두 직선의 평행 조건과 일치 조건**

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n\neq n'$

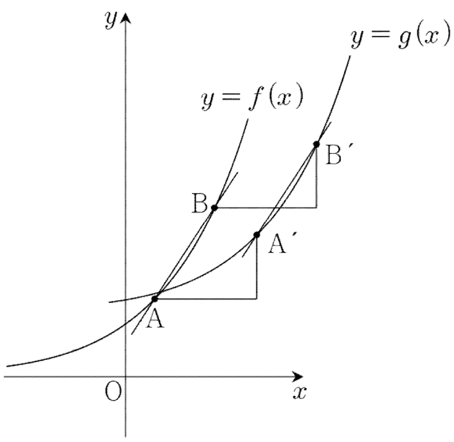
(2) 일치하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n=n'$

예제 2

지수함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하고, 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B는 각각 두 점 A′, B′으로 이동된다. 두 직선 AB, A′B′은 서로 평행함을 증명하시오.

증명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 점 A, B의 좌표를 각각

A$(p,\ 2^p)$, B$(q,\ 2^q)$

라고 하면 두 점 A′, B′의 좌표는 각각

A′$(p+m,\ 2^p+n)$, B′$(q+m,\ 2^q+n)$

(직선 AB의 기울기)$=\dfrac{2^q-2^p}{q-p}$

(직선 A′B′의 기울기)$=\dfrac{(2^q+n)-(2^p+n)}{(q+m)-(p+m)}$

$=\dfrac{2^q-2^p}{q-p}$

이므로 두 직선 AB, A′B′는 서로 평행하다.

답 풀이 참조

A. 로그함수의 그래프: 평행이동+대칭이동

▶ 기출 문제 p.32

예제 1

함수 $f(x)=\log_a(ax-2a)\,(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 평행이동시켜서 함수 $f(x)$의 그래프와 일치시킬 수 있다. ㄴ. $0<a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=a^x$의 그래프는 서로 만난다. ㄷ. $a>1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 서로 만나지 않는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

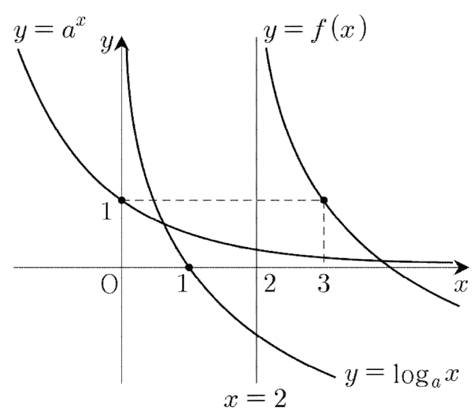
$\log_a(ax-2a)=\log_a a(x-2)=1+\log_a(x-2)$

이므로

$f(x)=1+\log_a(x-2)$

함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.

▸ ㄴ. (참)



$0<a<1$일 때,

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $y=a^x$는 양의 값을 가지면서 감소하고,

A. 로그함수의 그래프: 좌표평면(직선의 기울기)

▶ 실전 이론 p.163

A100

○

(2003(9)-인문12/예체능12/자연12)

함수 $y=\log_2(x+1)+1$의 그래프가 x축 및 y축과 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

A101

○○○

(2006(6)-나형12)

두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선이 두 곡선 $y=2\log x$, $y=3\log x$와 각각 두 점에서 만날 때, $(1,\ 0)$이 아닌 교점을 각각 $(p,\ 2\log p)$, $(q,\ 3\log q)$라 하자.
〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $m>0$, $p>1$, $q>1$ 이다.) [4점]

ㄱ. $p>q$
ㄴ. $m=\dfrac{3\log q-2\log p}{q-p}$
ㄷ. $m>\dfrac{3\log q}{q}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A102

○○○

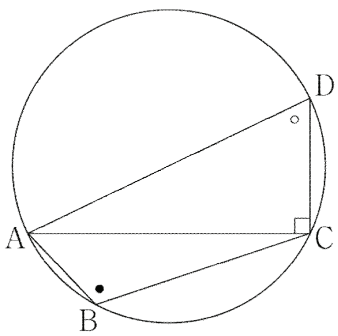
(2008-가형16/나형16)

직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_1>y_2$
ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$
ㄷ. $x_1y_1>x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이



(단, ●+○=180°)

선분 AD가 원의 지름이므로

$\angle \mathrm{ACD}=90°$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{CDA}=180°$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{(\sqrt{3})^2+4^2-5^2}{2\times\sqrt{3}\times4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin(\angle \mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=2R,\ \text{즉}\ R=\frac{10}{\sqrt{13}}$$

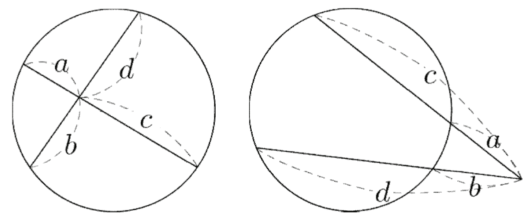
직각삼각형 ACD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{13}}\right)^2-5^2}=\frac{5\sqrt{39}}{13}$$

답 $\frac{5\sqrt{39}}{13}$

B. 코사인법칙: 할선 정리

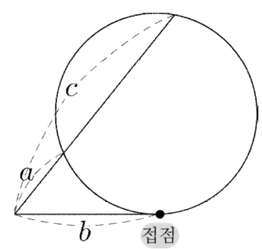
▶ 기출 문제 p.81



위의 두 그림에서 아래의 등식이 항상 성립한다.

$ac=bd$

특히 $b=d$인 경우는 다음과 같다.

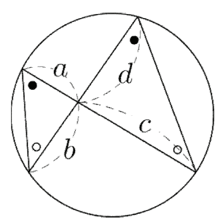


$ac=b^2$

위의 등식은 공식으로 기억해두면 쓸모가 많다.

맨 위의 왼쪽 그림만 증명해보자.

증명



원주각의 성질에 의하여 위와 같이 네 개의 각의 크기가 결정된다.

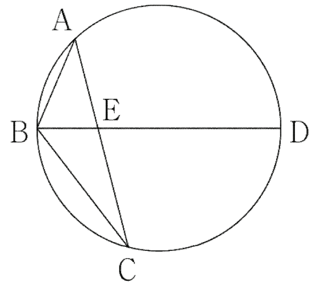
이때, 왼쪽과 오른쪽의 두 삼각형은 서로 닮음이므로

$a:b=d:c$, 즉 $ac=bd$

할선 정리를 적용한 문제를 풀어보자.

예제 1

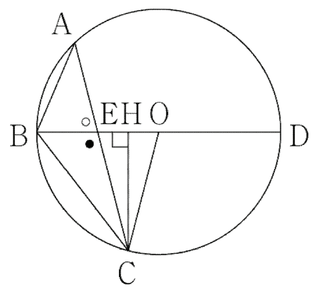
$\overline{BD}$가 지름인 원 위의 두 점 A, C에 대하여 두 선분 AC, BD가 만나는 점을 E라고 하자.



$\overline{BE}=2$, $\overline{ED}=6$, $\overline{AE}=3$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

풀이

원의 중심을 O, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 $\angle BEC=\theta(=\bullet)$로 두자.
이때, $\angle AEB=\pi-\theta(=\circ)$이다.



할선 정리에 의하여

$3\times\overline{EC}=2\times6$, 즉 $\overline{EC}=4$

세 변의 길이가 각각 4, 4, 2인 이등변삼각형 ECO에서 높이를 구하면

$\overline{CH}=\sqrt{15}$

직각삼각형 BCH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC}=2\sqrt{6}$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times2\times4}=-\frac{1}{4}$$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

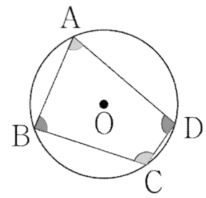
$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\pi-\theta)=10$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

B. 코사인법칙: 원에 내접하는 사각형

▶ 기출 문제 p.81



사각형 ABCD의 네 꼭짓점이 모두 한 원 위에 있을 때, 다음이 성립한다. (이때, O는 원의 중심이다.)

$\angle ABC+\angle CDA=180^\circ$,
$\angle BCD+\angle DAB=180^\circ$

맨 위의 등식만 증명해보자.

증명

$\angle ABC+\angle CDA$

$=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COA$ ($\because$ 원주각과 중심각의 관계)

$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COA)$

$=\frac{1}{2}\times360^\circ=180^\circ$

이를 이용한 기출문제를 풀어보자.

B. 코사인법칙: 할선 정리

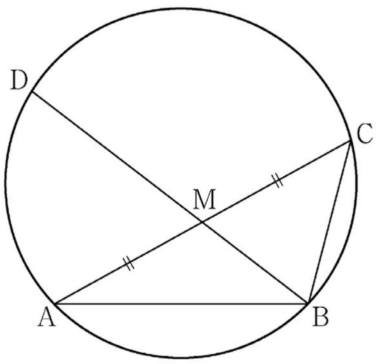
▶ 실전 이론 p.206

B069

●●●

(2023(6)-확률과통계10/미적분10/기하10)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$

B. 코사인법칙: 원에 내접하는 사각형

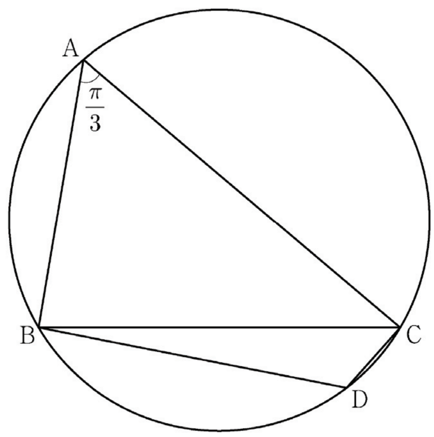
▶ 실전 이론 p.207

B070

○○

(2022(9)-확률과통계12/미적분12/기하12)

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $\frac{19}{2}$　② 10　③ $\frac{21}{2}$

④ 11　⑤ $\frac{23}{2}$

C. 등차수열의 합: 이차함수(식의 관점)

▶ 기출 문제 p.90

예를 들어 등차수열

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ \cdots$

의 첫 번째 항부터 제n항까지의 합을 S_n,

등차수열

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$

의 첫 번째 항부터 제n항까지의 합을 T_n

이라고 하면

$$S_n=\frac{n(n-1)}{2},\quad T_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 이때,

$$S_nT_n=\frac{n^2(n^2-1)}{4}$$

이다.

문제에서 두 수열 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$이 각각 등차수열의 합이고

$$S_nT_n=\frac{n^2(n^2-1)}{4}$$

일 때,

$$S_nT_n=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\underbrace{(0+1+2+\ \cdots\ +(n-1))}_{n\text{개}}\times\underbrace{(1+2+3+\ \cdots\ +n)}_{n\text{개}}$$

임을 간파하고 문제해결을 할 수도 있다.

C. 등차수열의 합: 이차함수(그래프)

▶ 기출 문제 p.91

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니면 수열 $\{S_n\}$은 이차함수이다. (이때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$이라고 하면

$$a_n=a_1+(n-1)d=\boxed{dn}+a_1-d, \qquad \cdots ㉠$$

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\times n=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n$$

이때, S_n을 n에 대하여 미분하면

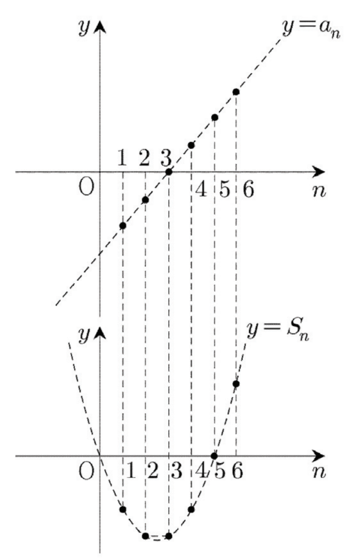
$$(S_n)'=\boxed{dn}+a_1-\frac{d}{2} \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 a_n, $(S_n)'$ 모두 최고차항의 계수가 d인 일차함수임을 알 수 있다. (단, $d\neq 0$이면 상수항은 다르다.)

예를 들어 수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이면 $(S_n)'$의 최고차항의 계수가 2이므로 $S_n=n^2+\ \cdots$이다. (이때, 부정적분을 한 것이다.)

그리고 아래와 같이 두 함수 a_n, S_n의 그래프를 함께 그리면 문제 풀이에 도움이 될 때가 많다.

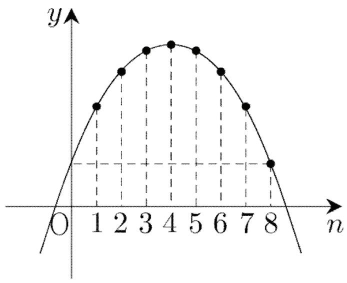
예를 들어 $a_n=2n-6$이면 $S_n=n^2-5n$이고, 이 두 함수를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.



예제 1

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

다음은 수열 $\{S_n\}$을 좌표평면에 나타낸 것이다.



이때, 각각의 값을 구하시오.

(1) $a_k \le 0$인 k의 최솟값

(2) $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8 < 0$인 m의 모든 값의 합

풀이

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$$

이므로 $d < 0$이다. 그리고 $a_1 = S_1 > 0$이다.

(1) $S_1 < S_2 < S_3 < S_4$이므로

a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 양수이다.

$(\because S_2 - S_1 = a_2 > 0,\ S_3 - S_2 = a_3 > 0,$

$S_4 - S_3 = a_4 > 0)$

$S_4 > S_5 > S_6 > S_7 > \cdots$이므로

a_5, a_6, a_7, $\cdots$는 모두 음수이다.

$(\because S_5 - S_4 = a_5 < 0,\ \cdots)$

따라서 k의 최솟값은 5이다.

(2) $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8$

$= S_8 - S_{m-1} < 0$, 즉 $S_8 < S_{m-1}$

$1 \le m-1 \le 7$, $2 \le m \le 8$

따라서 m의 모든 값의 합은 35이다.

답 (1) 5 (2) 35

예제 2

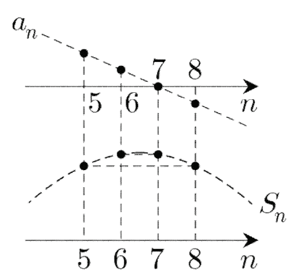
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $a_5 + a_7 + a_9 = 0$, $a_6 > a_8$일 때, 다음의 두 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $S_n \le S_{n+1}$

(나) $S_{n+1} \ge S_{n+2}$

풀이1

두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

$n+1 = 6$ 또는 7이다.

즉, $m = 5$ 또는 6이다.

따라서 구하는 값은 11이다.

답 11

풀이2

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

세 수 a_5, a_7, a_9는 이 순서대로 공차가 $2d$인 등차수열을 이룬다.

등차중항의 정의에 의하여

$2a_7 = a_5 + a_9$이므로

$a_5 + a_7 + a_9 = 3a_7 = 0$에서 $a_7 = 0$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a_8 - a_6 = 2d < 0$ 즉, $d < 0$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-6d$, $-5d$, $-4d$, $-3d$, $-2d$, $-d$,

$0(=a_7)$, d, $2d$, $3d$, $4d$, $\cdots$

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$-6d$, $-11d$, $-15d$, $-18d$, $-20d$, $-21d$,

$-21d(=S_7)$, $-20d$, $-18d$, $\cdots$

d가 음수이므로 다음의 대소 관계를 얻는다.

$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < S_5 < S_6 = S_7$,

$S_7 > S_8 > S_9 > \cdots$

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 n의 값은 5 또는 6이므로 구하는 값은 11이다.

답 11

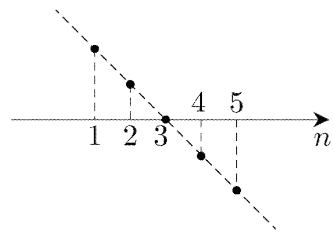
C. 등차수열의 합: 절댓값

▶ 기출 문제 p.91

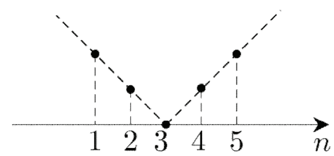
다음의 두 경우를 생각해보자.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공차가 -1이라고 하자.

수열 $\{a_n\}$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



수열 $\{|a_n|\}$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



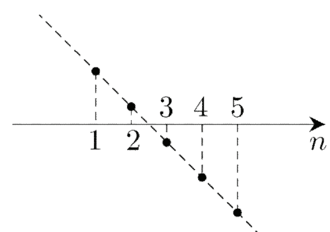
위의 그림에서

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|$

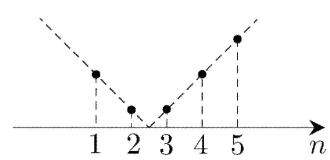
$=2+1+0+1+2=6$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{3}{2}$이고 공차가 -1이라고 하자.

수열 $\{a_n\}$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



수열 $\{|a_n|\}$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



위의 그림에서

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

C033

○○○
(2007(9)-가형11/나형11)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=0$, $a_n+a_{n+1}=n$을 만족시킨다. 다음은 두 자연수 m, n에 대하여 $\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$의 값을 구하는 과정이다. (단, $m<n$이다.)

$$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$
$$=a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\cdots+a_{n+m-1}+a_{n+m}$$
$$=(n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)$$
$$+(\boxed{\text{(가)}})$$
$$=\frac{(\boxed{\text{(나)}})\{(n-m+1)+(\boxed{\text{(가)}})\}}{2}$$
$$=\boxed{\text{(다)}}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$n+m-1$	m	mn
②	$n+m-1$	m	n^2
③	$n+m-1$	n	n^2
④	$n+m$	$m-1$	mn
⑤	$n+m$	$n-1$	n^2

C034

○○○
(2010(9)-가형14/나형14)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}}$$
$$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\cdots+a_{2k}}$$

을 만족시킨다. $\{a_n\}$은 등차수열이고,

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}=8$$

일 때, $\{a_n\}$의 공차는? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

C. 등차수열의 합: 이차함수(식의 관점)

▶ 실전 이론 p.212

C035

★★★
(2009(6)-가형16/나형16)

공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_nT_n=n^2(n^2-1)$$

일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_n=n$이면 $b_n=4n-4$이다.
ㄴ. $d_1d_2=4$
ㄷ. $a_1\neq 0$이면 $a_n=n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

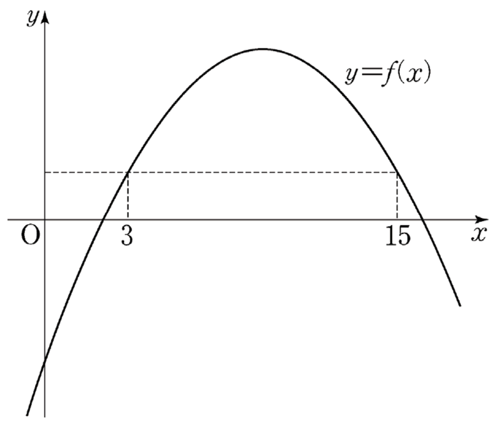
C. 등차수열의 합: 이차함수(그래프)

▶ 실전 이론 p.212

C036

○○○
(2010(6)−가형22/나형22)

함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15보다 작은 자연수일 때, $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오. [4점]



C037

○○○
(2020−나형15)

첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

C. 등차수열의 합: 절댓값

▶ 실전 이론 p.214

C038

○○
(2005(6)−가형7/나형7)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=6$, $a_{10}=-12$일 때,
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값은? [3점]

① 280　② 284　③ 288
④ 292　⑤ 296

C039

○○○
(2022(예시문항)−공통20)

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]