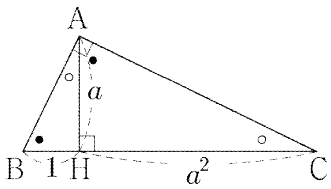
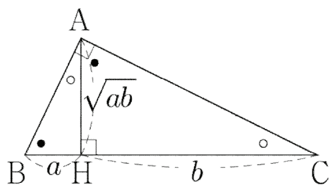
예를 들어 다음의 두 경우를 생각해 볼 수 있다.

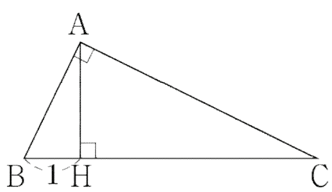




예제 1

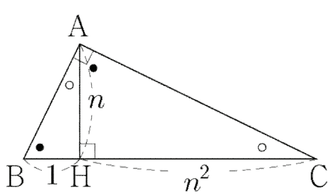
$\angle \mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{\mathrm{BH}}=1$,

$\tan(\angle \mathrm{CBA})=n$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{n^2}$의 값을 구하시오.



풀이

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.
그리고 △ABC∼△HBA∼△HAC이므로 두 변 AH, HC가 다음과 같다.



$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{n^2}=1$$

답 1

G. 수열의 극한: 극한의 기하적 해석

▶ 기출 문제 p.27

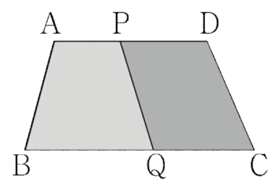
• 수열의 극한의 기하적 해석

아래의 네 문제를 풀고, 기하적 관점에서 해석해보아라.

예제 1

사다리꼴 ABCD에 대하여 선분 AD의 $n:n+1$ 내분점을 P, 선분 BC의 $2n:n+2$ 내분점을 Q라고 하자. 두 사각형 ABQP, PQCD의 넓이를 각각 $S(n)$, $T(n)$이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이다.)



풀이1

$$\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{\dfrac{n}{2n+1}\overline{\mathrm{AD}}+\dfrac{2n}{3n+2}\overline{\mathrm{BC}}}{\dfrac{n+1}{2n+1}\overline{\mathrm{AD}}+\dfrac{n+2}{3n+2}\overline{\mathrm{BC}}}$$

이므로 $n\to\infty$일 때, $\dfrac{S(n)}{T(n)}\to\dfrac{\dfrac{1}{2}\times2+\dfrac{2}{3}\times3}{\dfrac{1}{2}\times2+\dfrac{1}{3}\times3}=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

풀이2

$n\to\infty$일 때, $n:n+1$은 $1:1$이고, $2n:n+2$은 $2:1$이므로

점 P는 선분 AD의 중점이고, 점 Q는 선분 BC의 $2:1$ 내분점이다.

즉, $\overline{\mathrm{AP}}=1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

예제 2

두 직선 $y=nx-2n$, $y=-x+3$의 교점의 x좌표를 a_n이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

두 직선의 방정식을 연립하면

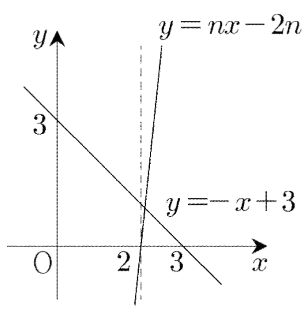
$nx-2n=-x+3$, $(n+1)x=2n+3$, $x=\dfrac{2n+3}{n+1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}=2$

답 2

풀이2

두 직선 $y=-x+3$, $y=n(x-2)$를 한 좌표평면에 그리자.



위의 그림처럼 두 직선의 교점의 x좌표는 2에 한없이 가까워진다.

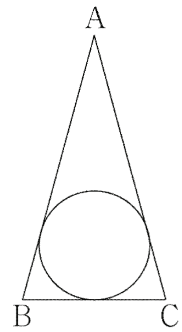
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$=$(두 직선 $y=-x+3$, $x=2$의 교점의 x좌표)$=2$

답 2

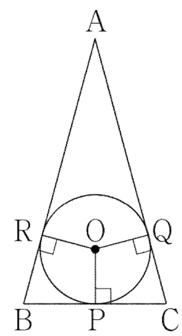
예제 3

$\overline{BC}=2$, $\overline{AB}=\overline{AC}(=n)$인 이등변삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r_n이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 BC, CA, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



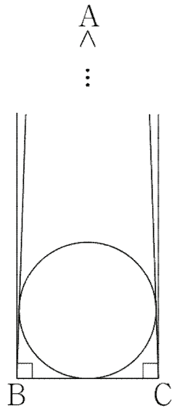
($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$ABO의 넓이)+($\triangle$OBC의 넓이)+($\triangle$AOC의 넓이)

즉, $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{1}{2}(2n+2)r_n$, $r_n=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}=1$

답 1

풀이2



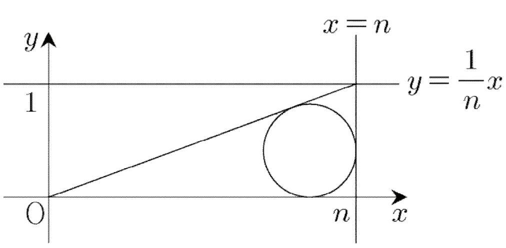
위의 그림처럼 원의 반지름의 길이는 1에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = 1$

답 1

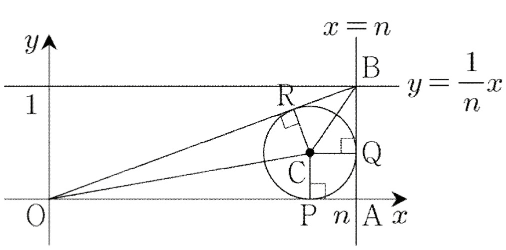
예제 4

좌표평면에서 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$, $x=n$과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 내접원 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.
$\lim_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 C, 점 C에서 x축, 두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{n}x$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자. (단, A$(n,\ 0)$, B$(n,\ 1)$이다.)



$\overline{OB}=\overline{OR}+\overline{RB}=\overline{OP}+\overline{QB}$, 즉

$\sqrt{n^2+1}=(n-r_n)+(1-r_n)$

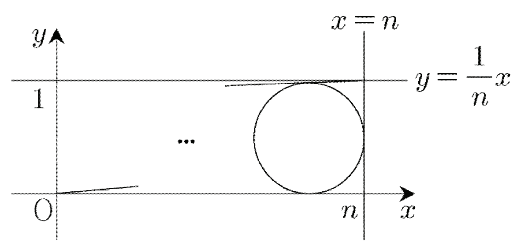
$$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

풀이2



$n\to\infty$일 때, 직선 $y=\frac{1}{n}x$는 점 $(n,\ 1)$을 지나면서 직선 $y=1$에 한없이 가까워지므로
위의 그림처럼 원의 지름의 길이는 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

G. 수열의 극한: 극한의 기하적 해석

▶ 실전 이론 p.216

G065

○○
(2016(9)−B형24)

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

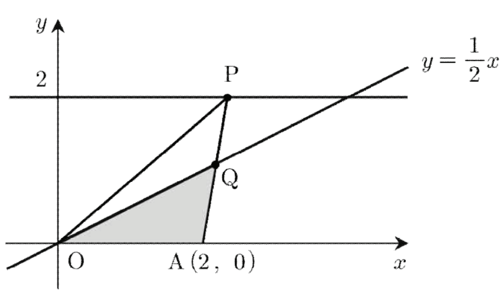
G066

○○○
(1995−인문예체능26/자연26)

좌표평면 위에 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(2,\ 0)$과 직선 $y=2$ 위를 움직이는 점 P$(t,\ 2)$가 있다.

선분 AP와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점을 Q라 하자.

△QOA의 넓이가 △POA의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때 t의 값을 t_1, $\frac{1}{2}$일 때 t의 값을 t_2, $\cdots$, $\frac{n}{n+2}$일 때 t의 값을 t_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty} t_n$의 값은? [2점]



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

G067

○○○
(2000−인문21)

자연수 n에 대하여, 두 곡선

$$y=x^2-2,\ y=-x^2+\frac{2}{n^2}$$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

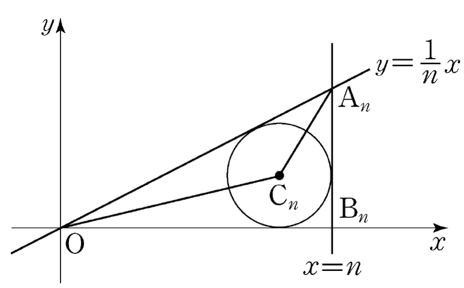
① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ 4
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

G068

●●●
(2011−나형14)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A$_n$, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B$_n$이라 하자. 삼각형 A$_n$OB$_n$에 내접하는 원의 중심을 C$_n$이라 하고, 삼각형 A$_n$OC$_n$의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

예제 2

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+x^2\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

일 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.

풀이

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=1+0=1$$

($\because$ 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$-|x|\le x\cos\frac{1}{x}\le |x|$이고,

$\lim_{x\to 0}|x|=0$, $\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$)

답 1

다음의 기출 문제는 함수의 그래프 개형을 그리는 것이 가능하므로

❶ 그래프의 개형

❷ 도함수의 좌극한, 우극한의 상등

❸ 미분계수의 정의

로 미분가능성에 대한 판단이 가능하다. 이에 대해서는 수학2에서 이미 배운 바 있다.

H. 초월함수의 미분가능성: 합성함수

▶ 기출 문제 p.152

• 합성함수의 미분가능성

〈합성함수의 미분가능성〉

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,

함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

증명

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

$$\lim_{x\to f(a)}\frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)}=g'(f(a))$$

이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\cdots(*)$$

$$=\lim_{t\to f(a)}\frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$$=g'(f(a))\times f'(a)$$

미분계수의 정의에 의하여

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ■

위의 명제와 이 명제의 역과 대우를 쓰면 다음과 같다.

❶ (참)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,

함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

그런데 $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. (이에 대해서는 추후에 자세하게 설명한다.)

❷ (거짓) ⇦ ❶의 역명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하다.
❸ (참) ⇦ ❶의 대우명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않거나,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하지 않다.

이상을 표로 정리하면 다음과 같다.

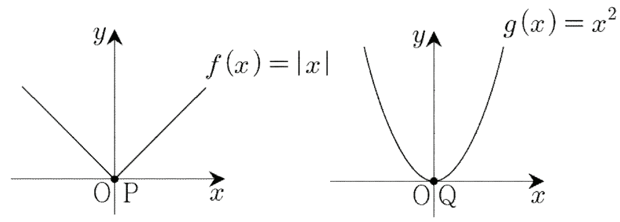
$f(x)$가 $x=a$에서	$g(x)$가 $x=f(a)$에서	$g(f(x))$가 $x=a$에서
미분○	미분○	미분○
미분○	미분×	?
미분×	미분○	?
미분×	미분×	?

(?=미분가능할 수도 있고, 가능하지 않을 수도 있다.)

몇 가지의 예를 들어보자.

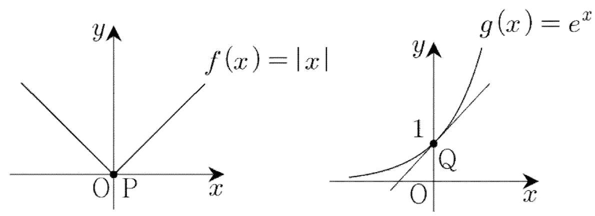
• 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 있는 경우

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.



$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times(-1)=0$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times1=0$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

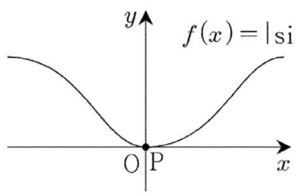
(2) $f(x)=|x|$, $g(x)=e^x$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

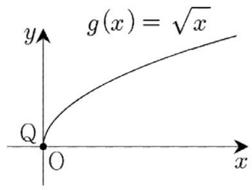


$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times(-1)=-1$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times1=1$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능이다.

● 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 없는 경우 (즉, 대수적으로 판단해야 하는 경우)

(1) $f(x)=|\sin^3 x|$, $g(x)=\sqrt{x}$ 일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.





$x\to 0$일 때, $f'(x)\to 0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times 0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\sin x}$$

$$=\sqrt{1^2\times 0}=0$$

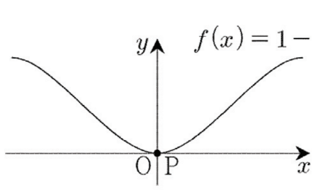
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

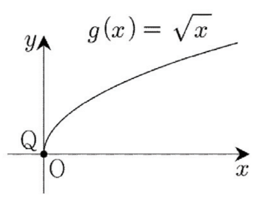
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to 0-}-\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times(-\sin x)}$$

$$=-\sqrt{1^2\times 0}=0$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=\sqrt{x}$ 일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.





$x\to 0$일 때, $f'(x)\to 0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times 0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0-}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $g(f(x))$가 정의된다고 하자.

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\boxed{\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\quad\cdots(*)$$

❶ 만약 $x\to a$일 때, 사각형 안의 함수의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. 즉, $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ($\because$ 미분계수의 정의)

❷ 만약 $f'(a)$, $g'(f(a))$의 값이 존재하면

$$(*)=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{t\to f(a)}\frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$$=g'(f(a))f'(a)$$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

따라서 합성함수의 미분가능성을 판단할 때에는 ❶, ❷의 경우를 모두 생각해야 한다.

H. 초월함수의 미분가능성: 미분계수의 정의

▶ 실전 이론 p.406

H227

★★★
(2015-B형30)

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

H. 초월함수의 미분가능성: 합성함수

▶ 실전 이론 p.407

H228

●●●
(2021-가형28)

두 상수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

H229

★★★ (2017(9)−가형30)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

H230

★★★ (2019(6)−가형21)

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

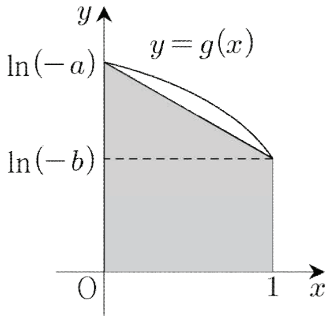
가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

> (가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
>
> (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서 어두운 부분(사다리꼴)의 넓이는

$$\frac{\ln(-a)+\ln(-b)}{2}\times 1=\frac{\ln ab}{2}=\ln\sqrt{ab}$$

이 사다리꼴의 넓이는 곡선 $y=g(x)$과 x축, y축 및 직선 $x=1$으로 둘러싸인 도형의 넓이보다 작다.

$$\therefore \int_0^1 g(x)dx \geq \ln\sqrt{ab}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

I. 넓이: 역함수

▶ 기출 문제 p.194

예제 1

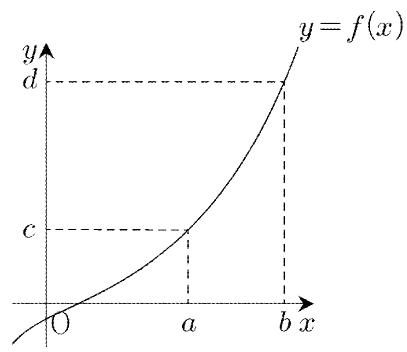
역함수를 갖는 연속함수 $f(x)$에 대하여

$f(a)=c$, $f(b)=d$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(x)dx$$

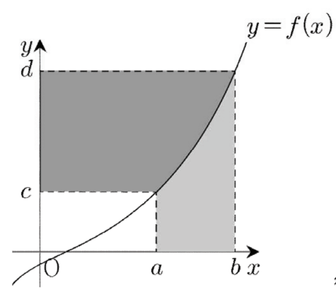
의 값을 a, b, c, d를 이용하여 나타내시오.

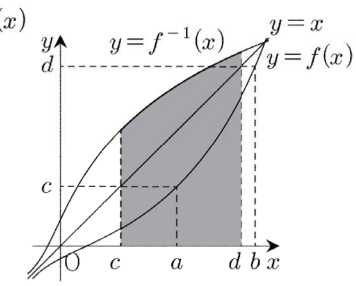
(단, $f^{-1}(x)$는 연속이고, $0<a<b$, $0<c<d$)



풀이

곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 일치한다.





위의 두 그림에서

$$\int_c^d f^{-1}(x)dx$$

=(곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이)

($\because$ 대칭이동을 해도 도형의 넓이가 변하지 않는다.)

이므로

$$\therefore \int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(x)dx=bd-ac$$

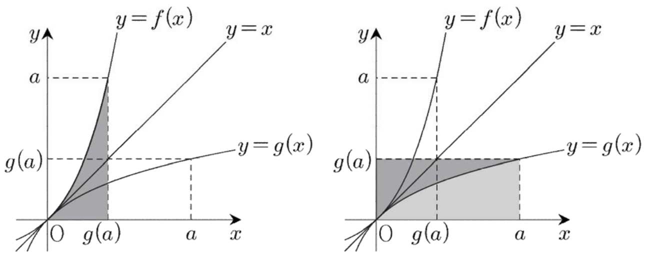
(즉, 큰 직사각형의 넓이에서 작은 직사각형의 넓이를 뺀 값이다.)

다음은 위의 경우의 특수한 경우이다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 연속인 역함수 $f^{-1}(x)$를 갖는다.

$g(x)=f^{-1}(x)$, $f(0)=0$, $f'(x)>0$일 때,

$$\int_0^{g(a)} f(x)dx+\int_0^a g(x)dx=ag(a)$$



예제 2

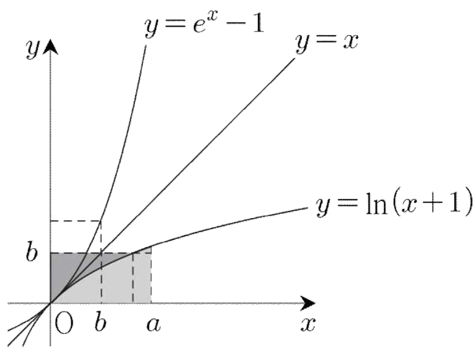
다음이 성립함을 증명하시오.

$a>0$, $b>0$일 때,

$$\int_0^a \ln(x+1)dx+\int_0^b (e^x-1)dx \ge ab$$

증명

(1) $b<\ln(a+1)$인 경우

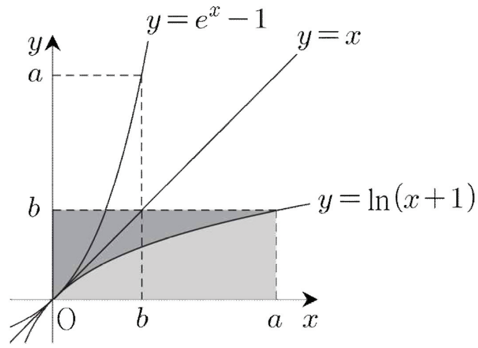


위의 그림에서 어둡게 칠한 두 도형의 넓이의 합은

$$\int_0^a \ln(x+1)dx+\int_0^b (e^x-1)dx$$

의 값과 같다. 이 값은 이웃한 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이보다 크다.

(2) $b=\ln(a+1)$인 경우

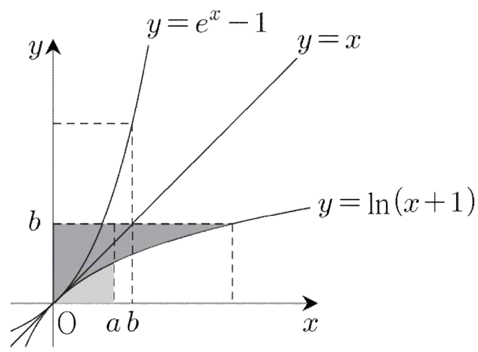


위의 그림에서 어둡게 칠한 두 도형의 넓이의 합은

$$\int_0^a \ln(x+1)dx+\int_0^b (e^x-1)dx$$

의 값과 같다. 이 값은 이웃한 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이와 같다.

(3) $b>\ln(a+1)$인 경우



위의 그림에서 어둡게 칠한 두 도형의 넓이의 합은

$$\int_0^a \ln(x+1)dx+\int_0^b (e^x-1)dx$$

의 값과 같다. 이 값은 이웃한 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이보다 크다.

(1), (2), (3)에서

$$\int_0^a \ln(x+1)dx+\int_0^b (e^x-1)dx \ge ab$$

(단, 등호는 $b=\ln(a+1)$일 때 성립한다.)

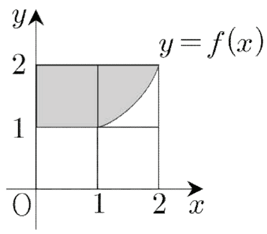
답 풀이 참조

예제 3

집합 $\{x|1 \le x \le 2\}$에서 집합 $\{y|1 \le y \le 2\}$로의 미분 가능한 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이다.

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$일 때, 정적분 $\displaystyle\int_1^2 f^{-1}(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $f^{-1}(x)$는 연속이다.)

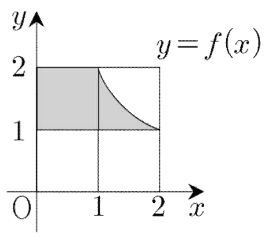
풀이



함수 $f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같다면

정적분 $\displaystyle\int_1^2 f^{-1}(x)dx$의 값은 최대가 된다.

이때, 최댓값은 $2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$이다.



함수 $f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같다면

정적분 $\displaystyle\int_1^2 f^{-1}(x)dx$의 값은 최소가 된다.

이때, 최솟값은 $1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}=3$이다.

답 3

I. 넓이: 대소비교

▶ 실전 이론 p.463

I090

○○○ (2009(9)−가형11)

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$
(나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여
$0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

I091

●●● (2010(9)−가형29)

함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0<x<1$일 때, $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$이다.
ㄴ. 구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.
ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

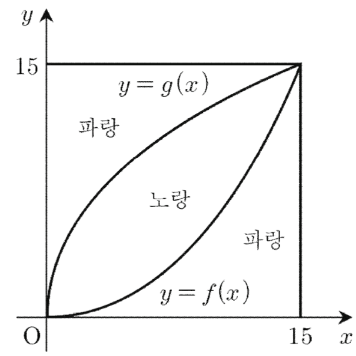
I. 넓이: 역함수

▶ 실전 이론 p.468

I092

○○ (1997−인문예체능25/자연25)

정사각형 모양의 타일이 좌표평면에 그림과 같이 가로, 세로가 각각 x축, y축과 일치되게 놓여 있다.
이 타일에 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 경계로 하여 파란색과 노란색을 칠하려고 한다. 파란색과 노란색이 칠해지는 부분의 면적의 비가 2 : 3일 때, $\int_0^{15} f(x)dx$의 값을 구하여라.
(단, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다) [3점]



I093

○○ (1993(실험평가7차)−공통16)

함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^9 g(x)dx$의 값은? [3점]

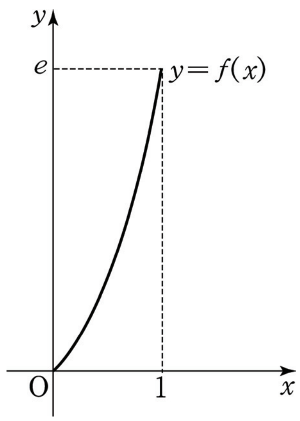
① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

I094

○○ (2005(예비)-가형28)

그림은 함수 $f(x)=xe^x(0\le x\le 1)$의 그래프이다.

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 정적분 $\int_0^e g(x)dx$의 값은? [3점]



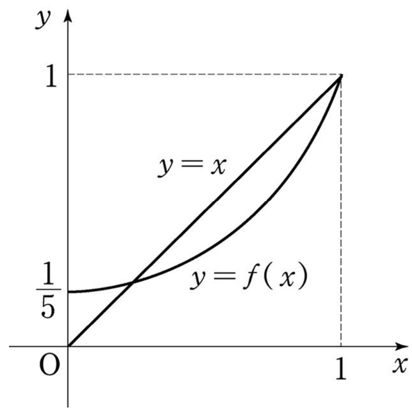
① $e-1$ ② $e-2$ ③ $\frac{3}{2}e-1$

④ $2e-1$ ⑤ $2e-2$

I095

○○○ (2006(9)-가형28)

오른쪽 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=1$

ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1096

○○○
(2023-미적분29)

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1$

(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^{14}g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

1097

○○○
(2009-가형27)

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은? [3점]

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

1098

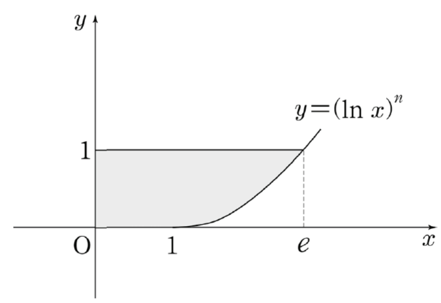
○○○
(2012(6)-가형18)

2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n$ $(x\geq 1)$과 x축, y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $1\leq x\leq e$일 때, $(\ln x)^n\geq(\ln x)^{n+1}$이다.

ㄴ. $S_n<S_{n+1}$

ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n$ $(x\geq 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $S_n=\int_0^1 g(x)dx$이다.



① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I099

★★★
(2022-미적분30)

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\displaystyle\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

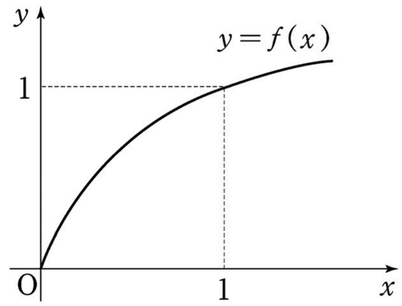
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 넓이: 역함수(구분구적법)

I100

●●●
(2005-가형10)

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

와 같은 값을 갖는 것은? [4점]

① $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$　② $\displaystyle\int_0^1 xg(x)dx$　③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

④ $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$　⑤ $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx$