CIRCUIT.G

시즌.2

시즌 2로 돌아왔습니다!

이번엔 5~8회분이 되겠네요

문제는 여전히 기출과 EBS교재의 문항을 선별하여 담았습니다.

다만, 이번 기하 서킷 시즌2 부터는 제 자작문항도 아주 조금 첨가했습니다. 아마 해설의 양식 중 이질적인 것을 찾다 보면 자작문항이 어떤 문항인지 아실 수 있을 것 같네요 ㅋㅋ

강대X에서 서킷을 강매하기 때문에...
구매가 망설여지는 기하러가 최대한 손해보지 않았으면 하는 마음으로 만들었습니다.

서킷 공통과목을 푼 후
같은 회차의 기하를 바로 이어서 푸시면 됩니다.

디자인도 평가원 양식이 아니고,
문제의 퀄도 썩 좋지 못하지만,

분명 무언가 하는 것은 도움이 되리라 생각합니다.

도움이 되길 바랍니다...

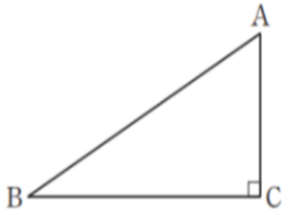
기하러 파이팅...!

-검열-

2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 5**회 문제지

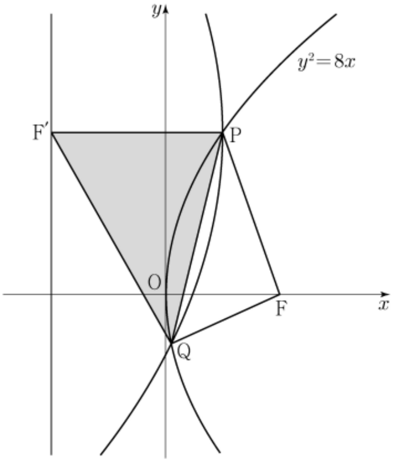
수학 영역(기하)

1. 그림과 같이 $\angle C = 90°$이고 $\overline{AB} = 2\overline{AC}$인 직각삼각형 ABC에서 $|\vec{AC} - \vec{CB} - \vec{AB}| = 4$일 때, $|\vec{AC}| \times |\vec{BC}|$의 값은?

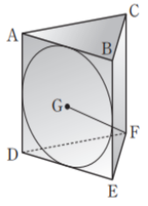


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

2. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

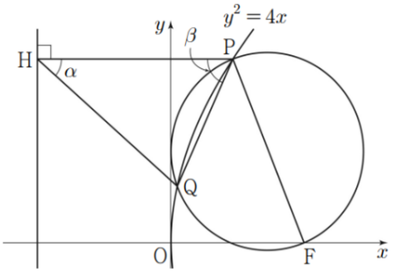


3. 그림과 같이 세 옆면이 모두 정사각형인 삼각기둥 ABC-DEF에 대하여 사각형 ADEB에 내접하는 원의 중심을 G라 하자. 직선 GF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기를 α라 하고, 두 직선 AC, GF가 이루는 각의 크기를 β라 할 때, $\sin\alpha + \cos\beta$의 값은?



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1 ④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

4. 초점이 F인 포물선 $C : y^2 = 4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q, 점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle\mathrm{QHP} = \alpha$, $\angle\mathrm{HPQ} = \beta$라 할 때, $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 3$이다.



$\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은?

① $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{7}$

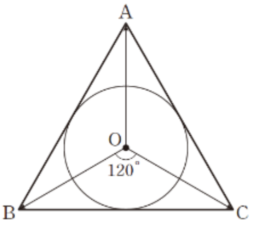
2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 6**회 문제지

수학 영역(기하)

1. $0 < k < 2$인 상수 k에 대하여 직선 $y = k$가 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기의 곱이 -3일 때, k^2의 값은?

① $\frac{10}{7}$ ② $\frac{12}{7}$ ③ 2 ④ $\frac{16}{7}$ ⑤ $\frac{18}{7}$

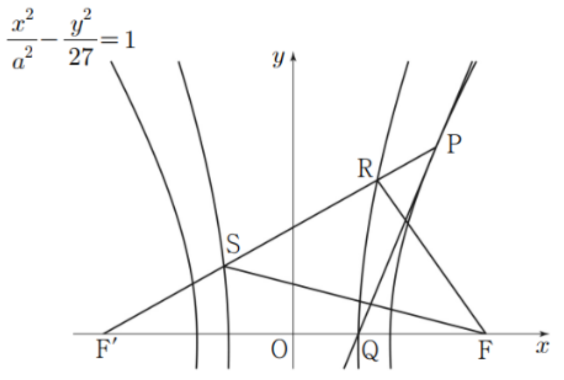
2. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에 내접하고 중심이 O인 원이 있다. $\overrightarrow{OA} \bullet (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -6$, $\angle COB = 120°$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

수학 영역(기하)

3. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF′과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{RF}}+8$일 때, $4\times\left(a^2+k^2\right)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.)

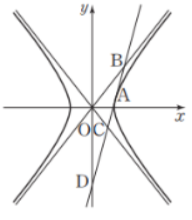


4. 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 OABC에 대하여 평면 ABC와 z축이 삼각형 ABC의 무게중심에서 만난다. 삼각형 OBC의 xz평면으로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 7**회 문제지

수학 영역(기하)

1. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 각각 B, C라 하고 y축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OC}}$일 때, 선분 OD의 길이는? (단, 점 B는 제1사분면의 점이고, O는 원점이다.)



① $2\sqrt{3}$
② $2\sqrt{6}$
③ $4\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{3}$
⑤ $4\sqrt{6}$

2. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$에 대하여 제1 사분면 위의 점 P가

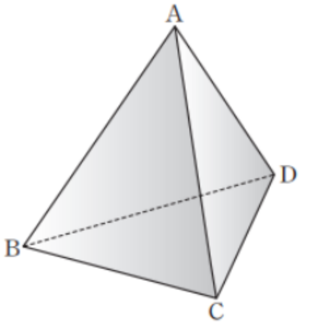
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=2,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

을 만족시키고, 제1 사분면 위의 점 Q가

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

3. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{5}$인 사면체 ABCD에서 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = 5$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$인 이등변삼각형이고, 삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 모든 $\overline{\mathrm{CD}}^2$의 값의 합은?



① 30
② 32
③ 34
④ 36
⑤ 38

4. 좌표평면에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 두 점 P와 Q가 $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{CQ}| = 2$을 만족시킨다. 직선 AC위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CQ}$를 만족시키는 점 X가 오직 하나뿐일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. 이 때, S의 값을 구하시오.

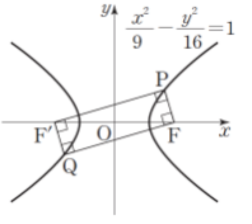
2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 8**회 문제지

수학 영역(기하)

1. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} - \vec{b}| = 4$일 때, $(2\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$의 값은?

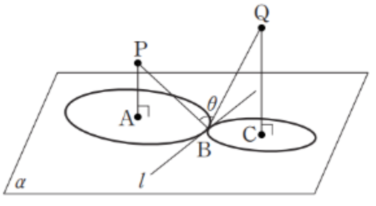
① -10
② -9
③ -8
④ -7
⑤ -6

2. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 사각형 $PF'QF$가 직사각형일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x 좌표는 양수이다.)



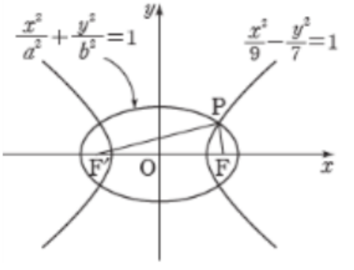
① $4\sqrt{37}$
② $4\sqrt{38}$
③ $4\sqrt{39}$
④ $8\sqrt{10}$
⑤ $4\sqrt{41}$

3. 그림과 같이 두 점 P, Q에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 A, C라 할 때, $\overline{PA}=3, \overline{QC}=6$이다. 평면 α 위의 직선 l에 대하여 점 A를 중심으로 하고 넓이가 16π인 평면 α위의 원이 직선 l과 점 B에서 접하고, 점 C를 중심으로 하고 넓이가 9π인 평면 α 위의 원이 직선 l과 점 B에서 접한다. 두 직선 BP, BQ가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, cosθ의 값은? (단, 7<$\overline{PQ}$<9)



① $\frac{\sqrt{5}}{25}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{25}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{25}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$과 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{FF'}=4\times\overline{PF}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



CIRCUIT.5

1번 문제 해설

$\vec{AC} - \vec{CB} - \vec{AB} = (\vec{AC} - \vec{AB}) - \vec{CB} = \vec{BC} + \vec{BC}$
$|\vec{AC} - \vec{CB} - \vec{AB}| = |\vec{BC} + \vec{BC}| = 2|\vec{BC}| = 4$에서
$\bar{BC} = |\vec{BC}| = 2$
직각삼각형 ABC에서$|\vec{AC}| = \bar{AC} = x$라 하면$\bar{AB} = 2x$이므로
$\bar{BC} = \sqrt{\bar{AB}^2 + \bar{AC}^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$

$\sqrt{3}x = 2$에서$x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 따라서
$|\vec{AC}| \times |\vec{BC}| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

2번 문제 해설

출제의도 : 포물선의 정의와 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
포물선 $y^2 = 8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은
$x = -2$이다.
점 P의 x좌표를 $a(0 < a < 2)$라 하면
$\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{2a})$
$\mathrm{F}'(-2,\ 2\sqrt{2a})$
포물선의 성질에 의해
$\bar{PF} = \bar{PF'} = 2 + a$
한편, 점 F'을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은
$(y - 2\sqrt{2a})^2 = -4(2+a)(x-a)$

이 포물선의 준선의 방정식은
$x = 2a + 2$
점 Q에서 두 직선 $x = -2,\ x = 2a+2$에 내린 수선의 발을 각각
$\mathrm{R},\ \mathrm{S}$라 하면
포물선의 성질에 의해
$\bar{QF} = \bar{QR}$,
$\bar{QF'} = \bar{QS}$
이므로
$\bar{QF} + \bar{QF'} = \bar{QR} + \bar{QS} = \bar{RS} = 2a + 4$
사각형 $\mathrm{PF'QF}$의 둘레의 길이가 12이므로
$\bar{PF} + \bar{PF'} + \bar{QF} + \bar{QF'} = 12$에서
$2\bar{PF'} + \bar{RS} = 12$
$2(2+a) + (2a+4) = 12$
$4a = 4$
$a = 1$
이때, P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이고
점 F'을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은
$(y - 2\sqrt{2})^2 = -12(x-1)$
이다.
두 포물선
$y^2 = 8x$ …… ㉠
$(y - 2\sqrt{2})^2 = -12(x-1)$ …… ㉡
이 만나는 점 Q의 y좌표를 구해 보자.
㉠에서

$x = \frac{y^2}{8}$

$x = \frac{y^2}{8}$을 ㉡에 대입하면

$(y - 2\sqrt{2})^2 = -12\left(\frac{y^2}{8} - 1\right)$

$5y^2 - 8\sqrt{2}y - 8 = 0$
$(y - 2\sqrt{2})(5y + 2\sqrt{2}) = 0$

$y = 2\sqrt{2}$ 또는 $y = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

점 Q의 y좌표는 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$이다.

점 Q에서 선분 $\mathrm{PF'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PF'}} = 2 - (-1) = 3$

$\overline{\mathrm{QH}} = 2\sqrt{2} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{12}{5}\sqrt{2}$

삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PF'}} \times \overline{\mathrm{QH}}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12}{5}\sqrt{2}$

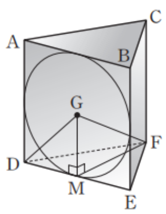
$= \frac{18}{5}\sqrt{2}$

따라서 $p = 5,\ \ q = 18$이므로
$p + q = 5 + 18 = 23$

정답 23

3번 문제 해설

세 옆면이 모두 정사각형이므로
$\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{DF}},\ \overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{DE}}$
따라서 직선 AD는 평면 DEF와 수직이다.



이때 선분 DE의 중점을 M이라 하면 직선 GM은 직선 AD와 평행하므로 직선 GM은 평면 DEF와 수직이다. 즉, 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발은 점 M과 일치한다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 2a\,(a > 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{GM}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{FM}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}a$

이므로 직각삼각형 GMF에서
$\overline{\mathrm{GF}} = \sqrt{\overline{\mathrm{GM}}^2 + \overline{\mathrm{FM}}^2} = 2a$
직선 GF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기 α는
$\alpha = \angle\mathrm{GFM}$이므로

$\sin\alpha = \sin(\angle\mathrm{GFM}) = = \frac{\overline{\mathrm{GM}}}{\overline{\mathrm{GF}}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

한편, 사각형 ADFC가 정사각형이므로 두 직선 AC, DF는 평행하고
두 직선 AC, GF가 이루는 각의 크기 β는 두 직선 DF, GF가 이루는
각의 크기와 같으므로 β = ∠GFD이고

$$\overline{\mathrm{DG}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}a$$

삼각형 GDF에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\beta = \cos(\angle\mathrm{GFD})$

$$= \frac{\overline{\mathrm{GF}}^2 + \overline{\mathrm{DF}}^2 - \overline{\mathrm{DG}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{GF}} \times \overline{\mathrm{DF}}} = \frac{(2a)^2 + (2a)^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2 \times 2a \times 2a}$$

$$= \frac{6a^2}{8a^2} = \frac{3}{4}$$

따라서 $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

4번 문제 해설

[출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R라 하고,
점 Q에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을
S라 하자.
$\overline{\mathrm{PR}} = k$라 하면

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}}{\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{RH}}}} = \frac{\overline{\mathrm{RH}}}{k} = 3$$에서 $\overline{\mathrm{RH}} = 3k$

두 점 P, Q가 포물선 C 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{PR}} + \overline{\mathrm{RH}} = 4k$,
$\overline{\mathrm{QF}} = \overline{\mathrm{SQ}} = \overline{\mathrm{RH}} = 3k$
한편 원 O 의 지름이 선분 PF이므로 삼각형 PQF는

$\angle\mathrm{FQP} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{QF}}^2} = \sqrt{16k^2 - 9k^2} = \sqrt{7}k$$

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 - \overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{QH}}^2 - \overline{\mathrm{RH}}^2$$

$7k^2 - k^2 = \overline{\mathrm{QH}}^2 - 9k^2$에서 $\overline{\mathrm{QH}} = \sqrt{15}k$

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{7}k} = \frac{\sqrt{105}}{7}$

CIRCUIT.6

1번 문제 해설
두 점 A, B가 y축에 대하여 대칭이므로

A(x_1, k), B$(-x_1, k)$ $(x_1 > 0)$으로 놓고, 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
위의 두 점 A, B에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하면 두 직선 l_1, l_2의 방정식은

$$l_1\text{: } x_1x + \frac{ky}{4} = 1$$

$$l_2\text{: } -x_1x + \frac{ky}{4} = 1$$

두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 $-\frac{4}{k}x_1$, $\frac{4}{k}x_1$이고, 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱이 -3이므로

$$-\frac{4}{k}x_1 \times \frac{4}{k}x_1 = -3,\ {x_1}^2 = \frac{3}{16}k^2 \text{ ...... ㉠}$$

두 점 A(x_1, k), B$(-x_1, k)$는 타원 위의 점이므로

$$ {x_1}^2 + \frac{k^2}{4} = 1 \text{ ...... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{3}{16}k^2 + \frac{k^2}{4} = 1,\ \frac{7}{16}k^2 = 1$$

따라서 $k^2 = \frac{16}{7}$

{다른 풀이}
두 점 A, B가 y축에 대하여 대칭이므로
A(x_1, k), B$(-x_1, k)$ $(x_1 > 0)$이라 하자.

타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$이 y축에 대하여 대칭이므로 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 두 점 A, B에서의 접선도 y축에 대하여 대칭이고, 이때 이 두 접선의 기울기의 곱이 –3이므로 두 접선의 기울기가 각각 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

그러므로 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 $-\sqrt{3}$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하면 된다.

타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 A(x_1, k)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + \frac{ky}{4} = 1$$

이 직선의 기울기가 $-\frac{4}{k}x_1$이므로

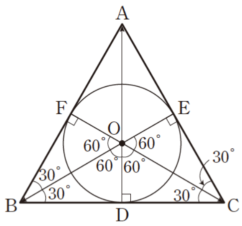
$-\frac{4}{k}x_1 = -\sqrt{3}$에서 $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}k$

점 $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}k,\ \ k\right)$가 타원 위의 점이므로

$\frac{3}{16}k^2 + \frac{k^2}{4} = 1$, $\frac{7}{16}k^2 = 1$

따라서 $k^2 = \frac{16}{7}$

2번 문제 해설



삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심이 O이므로 직선 OA과 선분 BC와 만나는 점을 D라 하면
$\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{DOB} = \angle\mathrm{COD}$
이때 $\angle\mathrm{COB} = 120^\circ$이므로 $\angle\mathrm{DOB} = \angle\mathrm{CDO} = 60^\circ$이고
$\angle\mathrm{OBD} = \angle\mathrm{DCO} = 30^\circ$
점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로 점 O는 $\angle\mathrm{B}$와 $\angle\mathrm{C}$의 이등분선의 교점이다.
그러므로 $\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OBD} = 30^\circ$,
$\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OCD} = 30^\circ$
따라서 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCA} = 60^\circ$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a\ (a > 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{OA}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

이므로
$\vec{\mathrm{OA}} \bullet (\vec{\mathrm{OB}} + \vec{\mathrm{OC}})$
$= \vec{\mathrm{OA}} \bullet \vec{\mathrm{OB}} + \vec{\mathrm{OA}} \bullet \vec{\mathrm{OC}}$
$= |\vec{\mathrm{OA}}|\,|\vec{\mathrm{OB}}|\ \cos 120^\circ + |\vec{\mathrm{OA}}|\,|\vec{\mathrm{OC}}|\ \cos 120^\circ$
$= \overline{\mathrm{OA}} \times (-\overline{\mathrm{OD}}) + \overline{\mathrm{OA}} \times (-\overline{\mathrm{OD}})$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}a \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}a \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$

$= -\frac{4}{3}a^2 = -6$

$a^2 = \frac{9}{2}$

따라서 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\mathrm{a})^2 = \sqrt{3}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

3번 문제 해설

[출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{9}{2a^2}x-\dfrac{k}{27}y=1$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{9}a^2,\ 0\right)$

두 점 R, S는 두 초점이 F, F′이고
점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}}=\dfrac{4}{9}a^2$

$\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}=\left(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{SF'}}\right)+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}$
$=\left(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}}\right)+\left(\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}}\right)$

$=\dfrac{4}{9}a^2+\dfrac{4}{9}a^2$

$=\dfrac{8}{9}a^2=8$

에서 $a^2=9$

점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점이므로

$k^2=\dfrac{135}{4}$

따라서 $4\times\left(a^2+k^2\right)=4\times\left(9+\dfrac{135}{4}\right)=171$

4번 문제 해설

{정답}

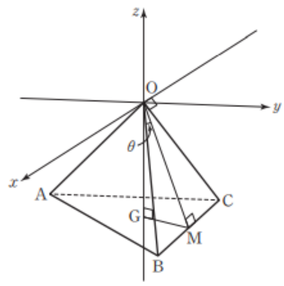
$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

평면 OBC와 xz평면이 이루는 각의 크기를

$\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 OBC의 xz평면 위로의

정사영의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta$이고, 이 값이 최대가 되려면

θ가 최소인 경우, 즉 변 BC가 x축과 평행한 경우이다.



삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M이라 하자. x축과 선분 BC가 평행하므로 선분 OM은 x축과 수직이고, 선분 OG도 x축과 수직이므로

$\theta = \angle\mathrm{MOG}$

$\overline{\mathrm{OM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{OG}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{OM}}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 OBC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

CIRCUIT.7

1번 문제 해설

점 A의 좌표를 $(s, t)(s > 0, t > 0)$이라 하자.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$\frac{sx}{4} - \frac{ty}{12} = 1$$

즉, $3sx - ty = 12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$

$y = \sqrt{3}x$를 ㉠에 대입하면

$3sx - \sqrt{3}tx = 12$

에서 $x = \dfrac{12}{3s - \sqrt{3}t}$

이므로 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{12}{3s - \sqrt{3}t}, \dfrac{12\sqrt{3}}{3s - \sqrt{3}t}\right)$이다.

$y = -\sqrt{3}x$를 ㉠에 대입하면

$3sx + \sqrt{3}tx = 12$에서 $x = \dfrac{12}{3s + \sqrt{3}t}$

이므로 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{12}{3s + \sqrt{3}t}, \dfrac{12\sqrt{3}}{3s + \sqrt{3}t}\right)$이다.

점 A는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{s^2}{4} - \frac{t^2}{12} = 1$$

$3s^2 - t^2 = 12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 60°, 120°이므로

$$\overline{\mathrm{OB}} = 2 \times \frac{12}{3s - \sqrt{3}t}$$

$$\overline{\mathrm{OC}} = 2 \times \frac{12}{3s + \sqrt{3}t}$$

$\overline{\mathrm{OB}} = 2\overline{\mathrm{OC}}$에서

$$\frac{24}{3s - \sqrt{3}t} = 2 \times \frac{24}{3s + \sqrt{3}t}$$

$6s - 2\sqrt{3}t = 3s + \sqrt{3}t$

$3s = 3\sqrt{3}t$

$s = \sqrt{3}t \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $s = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, t = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

㉠에서 $\mathrm{D}\left(0, -\dfrac{12}{t}\right)$이므로

D(0, -4$\sqrt{6}$)
따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$이다.
{다른 풀이}

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$의 점근선의 방정식은

$y = \sqrt{3}x,, y = -\sqrt{3}x$
이므로 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 60°, 12
$^\circ$이다.
$\overline{\mathrm{OB}} = 2\overline{\mathrm{OC}}$에서 $\overline{\mathrm{OB}} = 2k, \overline{\mathrm{OC}} = k\ (k > 0)$이라 하면

$\mathrm{B}(k, \sqrt{3}k), \mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2}k, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}k\right)$

그러므로 접선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}k - \left(-\dfrac{3}{2}k\right)}{k - \dfrac{1}{2}k} = 3\sqrt{3}$$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$에 대하여 기울기가 $3\sqrt{3}$이고 y절편이 음수인 접선의 방정식은

$y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{4 \times (3\sqrt{3})^2 - 12}$
$= 3\sqrt{3}x - \sqrt{96}$
$= 3\sqrt{3}x - 4\sqrt{6}$
이므로 D$(0, -4\sqrt{6})$
따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$이다.

2번 문제 해설

[출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 벡터의 내적을 구하는 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ 에서 $\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 0$ 에서 $\overline{\mathrm{OQ}} \perp \overline{\mathrm{AQ}}$
직각삼각형 OAP에서 $\overline{\mathrm{OA}} = 5, \overline{\mathrm{OP}} = 2$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{AOP}) = \dfrac{2}{5}$

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{\mathrm{OA}} = 5, \overline{\mathrm{AQ}} = 1$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{QAO}) = \dfrac{1}{5}$

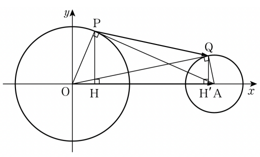
두 점 P, Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H , H′ 이라 하면

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OP}} \times \cos(\angle \mathrm{AOP}) = 2 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$

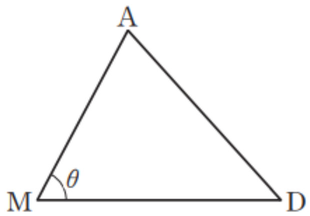
$\overline{\mathrm{H'A}} = \overline{\mathrm{QA}} \times \cos(\angle \mathrm{QAO}) = 1 \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$

이므로 $\overline{\mathrm{HH'}} = \overline{\mathrm{OH'}} - \overline{\mathrm{OH}} = \left(5 - \dfrac{1}{5}\right) - \dfrac{4}{5} = 4$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{HH'}} = 5 \times 4 = 20$



3번 문제 해설
공간도형
{풀이}
선분 BC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 $\mathrm{ABC}, \mathrm{BCD}$가 모두 이등변삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{DM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$
즉, $\angle \mathrm{AMD}$가 두 평면 $\mathrm{ABC}, \mathrm{BCD}$가 이루는 각이다.
직각삼각형 ABM에서
$\overline{\mathrm{AM}}^2 = 5^2 - 2^2 = 21$
또, $\overline{\mathrm{CD}} = x$라 하면 직각삼각형 CDM에서
$\overline{\mathrm{DM}}^2 = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$



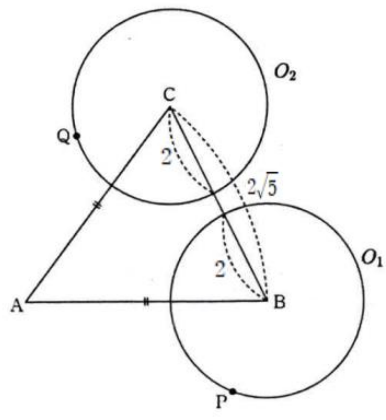
삼각형 AMD에서 $\overline{AD} = 2\sqrt{5}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{DM}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AM}} + \overline{\mathrm{DM}} \times \cos\theta$

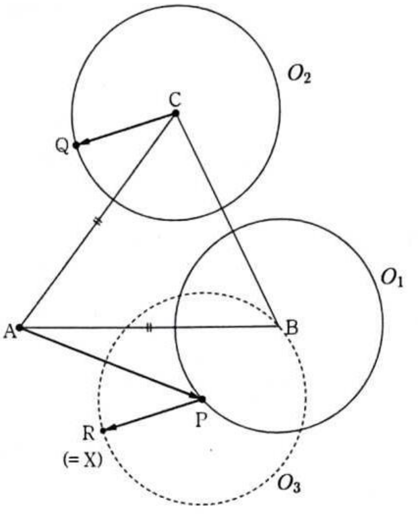
$20 = 21 + (x^2 - 4) - 2 \times \sqrt{21} \times \sqrt{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{x^2 - 4} = x^2 - 3$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^4 - 34x^2 + 121 = 0$
따라서 $\overline{\mathrm{CD}}^2 = x^2$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 $\overline{\mathrm{CD}}^2$의 값의 합은 34이다.

4번 문제 해설
{정답} 10



그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서
$|\overline{BP}|=|\overline{CQ}|=2$이므로
점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인
원 O_1 위를 움직이는 점이고,
점 Q는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인
원 O_2 위를 움직이는 점이다.



그림과 같이 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가
2인 원 O_3 위의 점 중 $\overline{CQ}=\overline{PR}$인 점 R을 잡자.

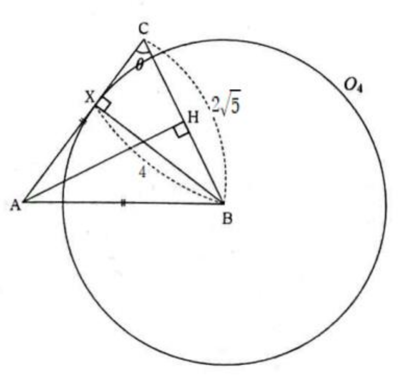
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CQ}\\ &= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}\\ &= \overrightarrow{AR}\end{aligned}$$

이므로 점 X는 점 R와 같다.
따라서 점 X는 원 O_3 위를 움직이는 점이며,
그것이 나타내는 도형은 점 B를 중심으로 하고
반지름의 길이가 4인 원 O_4의 둘레 및 내부와 같다.

그림과 같이 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O_3 위의 점 중 $\overline{CQ}=\overline{PR}$인 점 R을 잡자.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CQ}\\
&= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}\\
&= \overrightarrow{AR}
\end{aligned}
$$

이므로 점 X는 점 R와 같다.
따라서 점 X는 원 O_3 위를 움직이는 점이며,
그것이 나타내는 도형은 점 B를 중심으로 하고
반지름의 길이가 4인 원 O_4의 둘레 및 내부와 같다.



문제의 조건에 의하여 원 O_4는 선분 AC에 접한다.

피타고라스의 정리에 의해
$\overline{CX}=2$
$\overline{AX}=3$
$\overline{AB}=5$
이다.

삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(2+3)\times 4=10$ 이다.

CIRCUIT.8

1번 문제 해설

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\bullet(\vec{a}-\vec{b})$

$\quad=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$\quad=4-2\vec{a}\bullet\vec{b}+16=16$

에서 $\vec{a}\bullet\vec{b}=2$ 이므로

$(2\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\bullet\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2$

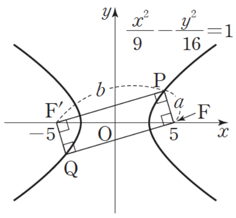
$\quad\quad=2\times4-2-16=-10$

2번 문제 해설

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점은

$F\ \left(\sqrt{9+16},\ 0\right), F'\left(-\sqrt{9+16},\ 0\right)$

즉, $F\ (5,\ 0), F'(-5,\ 0)$



직사각형 $PF'QF$에서 $\overline{PF}=a, \overline{PF'}=b$로 놓으면 점 P가 제1사분면에 있으므로 $b>a$이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$b-a=6$, 즉 $b=a+6$이다.

이때 삼각형 $PF'F$는 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이고

$\overline{FF'}=10$이므로

$a^2+b^2=a^2+(a+6)^2=10^2$

$a^2+6a-32=0$

이때 $a>0$이므로 $a=-3+\sqrt{41}, b=3+\sqrt{41}$

따라서 직사각형 $PF'QF$의 둘레의 길이는

$2\ (a+b)=2\ \times\ 2\sqrt{41}=4\sqrt{41}$

3번 문제 해설

점 A를 중심으로 하고 직선 l과 점 B에서 접하는 원의 넓이가 16π이므
지름의 길이는 $\overline{AB}=4$이다.
또한 점 C를 중심으로 하고 직선 l과 점 B에서 접하는 원의 넓이가 9π
의 반지름의 길이는 $\overline{CB}=3$이다.
이때 $\overline{PA}\perp\alpha, \overline{AB}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PB}\perp l$

같은 방법으로 $\overline{QB}\perp l$이므로 다섯 개의 점 P, A, B, C, Q는 한 평면 우

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{AC}^2+\left(\overline{QC}-\overline{PA}\right)^2}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{QB}=\sqrt{\overline{QC}^2+\overline{CB}^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{PB}^2+\overline{QB}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{PB}\times\overline{QB}}=\frac{5^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2-(\sqrt{58}}{2\times5\times3\sqrt{5}}$$

4번 문제 해설

{정답}

34

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$에서 $c^2=9+7=16$이므로

$F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$

즉, $\overline{FF'}=8$이므로 $\overline{PF}=2$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$이므로 $\overline{PF'}=8$

한편, 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=2a$

$8+2=2a$에서 $a^2=25$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F, F'이므로

$16=25-b^2$에서 $b^2=9$

따라서

$a^2+b^2=25+9=34$

답 34