제 2 교시

수학 영역

공통과목

1	2	3	4	5
③	①	④	③	⑤
6	7	8	9	10
②	④	③	②	④
11	12	13	14	15
①	③	⑤	④	④
16	17	18	19	20
128	37	12	24	51
21	22			
19	39			

선택과목-확률과 통계

23	24	25	26	27
⑤	②	②	④	②
28	29	30		
②	88	117		

선택과목-미적분

23	24	25	26	27
③	④	②	③	②
28	29	30		
④	27	20		

선택과목-기하

23	24	25	26	27
④	③	②	③	⑤
28	29	30		
②	29	17		

총평 및 분석

예상 난이도는 미적분 1컷 89, 확통 및 기하는 92점 정도로 예상합니다.

전반적으로 9평의 경향을 고려하여 제작해서
전형적인 느낌이 강했을 거라 예상합니다.
다만 공통 13, 15번, 미적분 30번, 확통 28번이 변별력있는 문항으로 작용했을 것입니다.

수능 얼마 남지 않았는데, 마지막까지 긴장의 끈을 놓지 마시길 바랍니다. 항상 응원합니다.

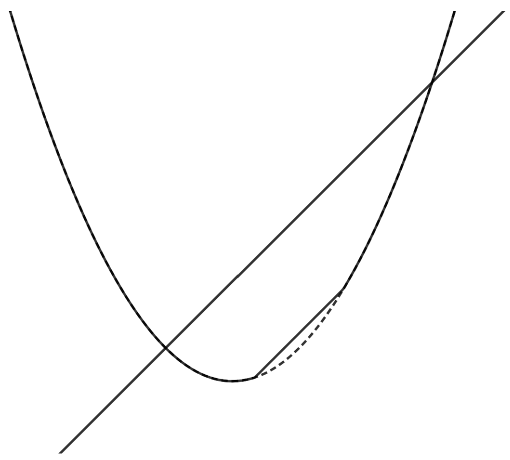
9.

정답: ②

해설:

주어진 곡선은 $x=1$과 $x=2$ 사이에서 $y=3x-2$이고, 그 바깥에서 $y=2x^2-3x+2$이다.

주어진 곡선과 직선 $y=3x+2$의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=2x^2-3x+2$와 직선 $y=3x+2$가 $x=0$과 $x=3$에서 만나므로, 구하는 넓이는
$y=2x^2-3x+2$와 직선 $y=3x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이에서
$y=2x^2-3x+2$와 직선 $y=3x-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값이다.
곧, $\frac{2}{6}(3^3-1^3)=\frac{26}{3}$이다.

10.

정답: ④

해설:

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
$a_5\times a_9=(a_7-2d)(a_7+2d)=a_7^2-4d^2$에서,
주어진 네 수는 공차가 $k=4d^2$인 등차수열을 이룬다.
곧, $a_3^2=a_7^2-8d^2$, $a_1=a_7^2-12d^2$이다.
$a_3^2=a_7^2-8d^2$에서 $(a_7+a_3)(a_7-a_3)=8da_5=8d^2$이므로
$a_5=d$이다.
이로부터 $a_1=a_7^2-12d^2$과 연립하면
$d=1$, $a_{10}=6$을 얻는다.
$k=4d^2$에서 $k=4$이고, $k+a_{10}=10$이다.

여담:

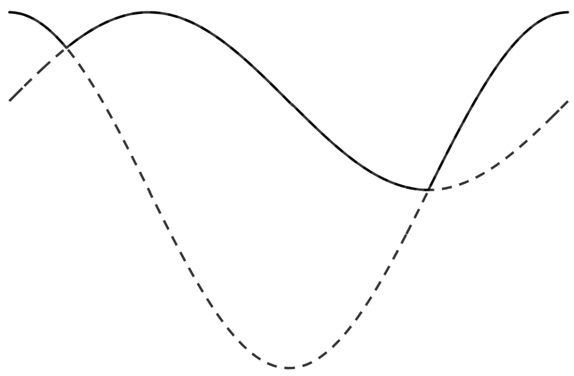
무작정 $a_1=a$로 두고 공차 d 사용해서 전부 a와 d 이용해서 바꾸지는 말자.

11.

정답: ①

해설:

일단 연립을 통해 $0 \le x \le 2\pi$에서 $2\cos x$와 $\sin x+1$의 교점을 구하면,
$2\cos x = \sin x + 1$에서,
$4 - 4\sin^2 x = \sin^2 x + 2\sin x + 1$이므로
$\alpha\left(\sin\alpha = \dfrac{3}{5},\ \cos\alpha = \dfrac{4}{5}\right)$와 $\dfrac{3}{2}\pi$에서 만난다는 것을 알 수 있다.
양수 k를 곱해도 두 그래프의 교점의 x좌표는 변하지 않고 개형이 유지된다. 또한 $f(x)$의 정의에 따라 그래프를 그리면 다음과 같다. (진한 곡선)



이로부터 주어진 조건을 만족시키는 t의 값은 $x=0$과 $x=\alpha$를 대입한 순간의 y값이므로 $2k + \dfrac{8}{5}k = 36$
곧, $k=10$이다.

여담:

이 문제에서는 사용되지 않지만, '크지 않은', '작지 않은' 것을 택하는 함수는 하나의 수식을 이용하여 나타낼 수 있음을 알아두자.

$f(x)$와 $g(x)$ 중 작지 않은: $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$

$f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은: $\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$

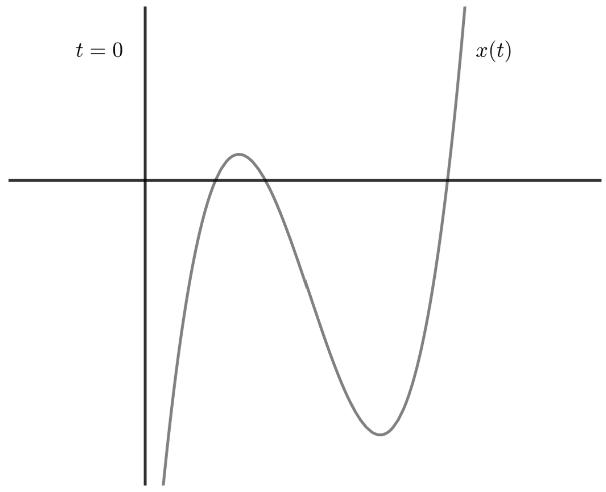
이로부터 알 수 있는 점은 다음과 같다.
만약 수2에서나 미적분에서 '크지 않은', '작지 않은' 이라는 표현의 함수가 나오고, 미분가능성에 대해서 묻고 있다면 이 문제는 결국 '절댓값함수의 미분가능성'을 묻고 있는 것이나 마찬가지이다.
'크지 않은', '작지 않은' 이라는 표현의 함수에 절댓값 함수가 내포되어 있기 때문이다.

12.

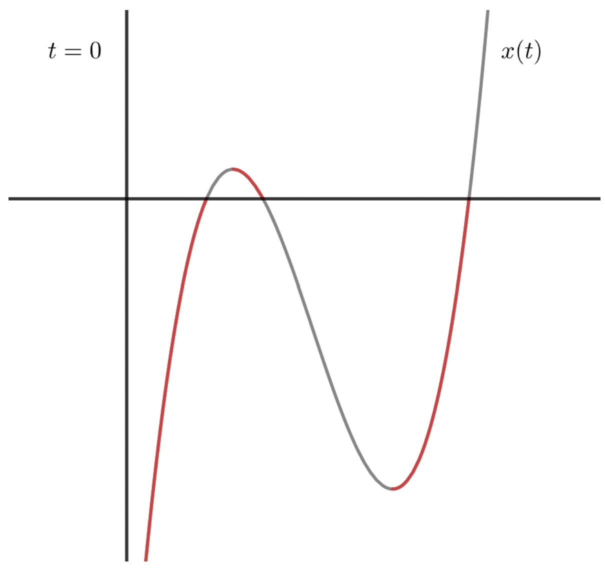
정답: ③

해설:

일단 주어진 위치함수로부터 속도함수 $v(t)$를 구하자.
$v(t) = 9t^2 - 42t + 40 = (3t-10)(3t-4)$
또한, 가로축을 t축으로 하고, 위치함수의 개형을 그리면 다음과 같다.



점 P가 원점에 가까워지는 부분을 표시하면 다음과 같다.



첫 번째 빨간색 부분에서는 $x(1)-x(0)$만큼을,
두 번째 빨간색 부분에서는 $x\left(\dfrac{4}{3}\right)$만큼을,
세 번째 빨간색 부분에서는 $-x\left(\dfrac{10}{3}\right)$만큼 이동한다.

곧, $22 + x\left(\dfrac{4}{3}\right) - x\left(\dfrac{10}{3}\right) = 22 + \dfrac{9}{6}\left(\dfrac{10}{3} - \dfrac{4}{3}\right)^3 = 34$이다.

13.

정답: ⑤

해설:

주어진 조건으로부터 $f(x)+2\neq 0$이라면 $g(x)=\dfrac{f(x+2)}{f(x)+2}$이다.

일단 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$에서 $f(3)=0$임을 알 수 있다.

또한, $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 아니라면 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 불연속이 되므로 $f(1)=-2$임을 알 수 있다.

이때, $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x+2)}{f(x)+2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{f(x+2)}{x-1}}{\frac{f(x)+2}{x-1}}$이라 하자.

1) 만약 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다고 할 때,
$f'(1-)=f'(1+)=-1$이다.
이 경우, $\lim_{x\to 1}g(x)$의 값이 존재하여 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이다.
다만, x^3+ax^2+bx+c는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 사잇값 정리에 의해 $f(k)=-2$인 $k>1$인 실수 k가 존재한다.
이에 따라 $f(k+2)=0$이어야 $g(x)$가 $x=k$에서 연속이 될 수 있는데
$f(3)=0,\ f(k)=-2,\ f(1)=-2,\ f'(1)=-1,\ f(k+2)=0$을 만족시키는 삼차함수는 존재하지 않으므로 모순이다.
(그래프를 간략하게 그려보면 알 수 있다.)

2) 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
그런데 $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x+2)}{f(x)+2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{f(x+2)}{x-1}}{\frac{f(x)+2}{x-1}}$가 존재해야 하므로 $f'(3)=0$이다.

$f(3)=0,\ f'(3)=0,\ f(1)=-2$를 이용하여 연립하면
$x^3+ax^2+bx+c=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)^2$이고,
이를 통해 $a+b-c=24$임을 알 수 있다.

14.

정답: ④

해설:

사인법칙에 의해, $\sin A=a$라 할 때
삼각형 ABC와 삼각형 ABD의 외접원의 넓이의 합을 구해보면
$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2=\dfrac{9}{4a^2}=\dfrac{81}{4}$에서 $a^2=\dfrac{1}{9},\ a=\dfrac{1}{3}$이다.

만약 $\angle A>\dfrac{\pi}{2}$이라면, 선분 BC의 길이는 선분 BD의 길이보다 커야 하므로 주어진 조건에 모순이다.

곧, $\angle A<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\cos A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 이로부터 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이다.
또한, 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면
$3=18+\overline{AC}^2-8\overline{AC}$에서 선분 AC의 길이는 3 또는 5이다.
만약 AC의 길이가 5라면, $(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2<5^2$이므로 $\cos B<0$이다. 따라서 선분 AC의 길이는 3이다.

여담:

도형 문제를 바라보는 핵심적인 자세를 크게 두 가지 뽑아보면 다음과 같다.
1) 무조건 사인법칙과 코사인법칙을 1순위로 고려하자.
수능 문제는 경시문제가 아니므로 사인법칙 내지는 코사인법칙을 아예 쓰지 않고 풀 수 있는 문제를 지양한다.

2) 삼각형의 결정 조건을 이해하자.
삼각형은 3개의 변과 3개의 각, 총 6요소로 이루어져 있다.
6개의 요소 중 3가지를 알면 삼각형을 결정할 수 있다.
(1) 3개의 변을 안다.
(2) 2개의 변과 하나의 각을 안다.
(3) 1개의 변과 두 개의 각을 안다.

여기서 '각을 안다'라는 표현은 그 각의 sin, cos, tan 등의 삼각함수의 값을 안다는 의미이다.

주의*
1) 삼각형의 세 내각의 합은 π이므로 두 각을 알면 나머지 하나의 각도 알 수 있다.
따라서 세 내각을 안다고 해서 삼각형을 결정할 수 없고, 반드시 적어도 하나의 변을 알아야 한다.
2) (2)의 경우에서 각이 끼인각이 아닌 경우, 삼각형이 유일하게 결정되지 않고 2가지 경우로 구해질 수 있다.

15.

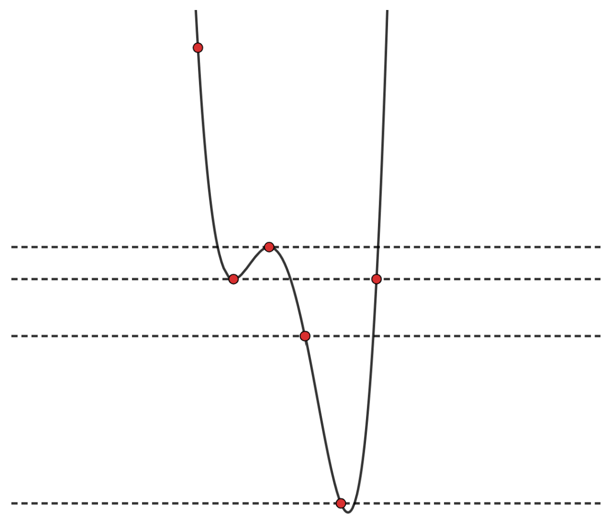
정답: ④

해설:

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 할 때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가

$\frac{1}{4}$ 이고 $g(0)=0$인 사차함수이다.
주어진 조건으로부터 $g(-1)=g(3)<0$이고 $g(0)=0$에서,
함수 $g(x)$가 $(-1,\ 3)$사이에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다.
또한 이로부터 $g'(x)=f(x)$가 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.
따라서 주어진 조건을
'모든 정수 k에 대하여 방정식 $\int_k^x f(t)dt=0$의 실근의 개수가 3보다 작거나 같다.'라고 해석해도 된다.
일단 $k=0$일 경우에 주목하자.
만약 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다면,
사차함수의 개형에 의해 $k=0$일 때 방정식 $\int_k^x f(t)dt=0$의 실근의 개수가 4가 된다.
곧, $g'(0)=f(0)=0$이고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
또한, $g(x)$가 $x=-1$과 $x=3$에서 모두 극값을 갖지 않는다면,

$k=-1$과 $k=3$인 경우에서 방정식 $\int_k^x f(t)dt=0$의 실근의 개수가 4가 된다.
따라서 $g'(3)=0$이거나 $g'(-1)=0$이다.
1) $g'(3)=0$인 경우
이 경우 $k=1,\ 2$에서 방정식 $\int_k^x f(t)dt=0$의 실근의 개수가 4가 된다.
2) $g'(-1)=0$인 경우
$f(-1)=0$에서
$\int_{-1}^x f(t)dt=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-a)(x-3)$이라 두면 $f(0)=0$에서
$a=\frac{3}{5}$이고, $f(x)$의 부정적분의 개형은 다음과 같다.



그림에서 확인할 수 있듯이,
정수 k에 대하여 방정식 $\int_k^x f(t)dt=0$의 실근의 개수는 2 또는 3이다. (빨간색 점이 x좌표가 정수인 점이다.)
따라서 $f(5)=84$이다.

여담:

$f(x)$ 자체보다는 그것의 부정적분 함수를 주목해야 한다.
즉, 무엇을 관찰대상으로 삼을 지가 중요했던 문제이다.
억지로 $f(x)$ 기준으로 추론했다면 풀 수 없을 것이다.

20.

정답: 51

해설:

주어진 두 곡선을 연립하면
방정식 $2^{1-x}+2^{1+x}=k$의 해는 α와 $-\alpha$로 둘 수 있다. $(\alpha>0)$
곡선 $y=2^{x+1}$을 기준으로 고려하면 두 교점의 좌표는
$\mathrm{A}\left(-\alpha,\ 2^{1-\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\alpha,\ 2^{\alpha+1}\right)$이고,
선분 AB를 지름으로 하는 원이 원점 O를 지나므로
각 AOB가 직각이다.
따라서 $\dfrac{-2^{1-\alpha}}{\alpha}\times\dfrac{2^{1+\alpha}}{\alpha}=-1$에서 $\alpha=2$이다.
이를 $2^{1-x}+2^{1+x}=k$에 대입하면 $k=\dfrac{17}{2}$이므로 $6k=51$이다.

여담:

작수 20번에서도 볼 수 있듯이,

지름의 원주각은 $\dfrac{\pi}{2}$임을 기억하자.

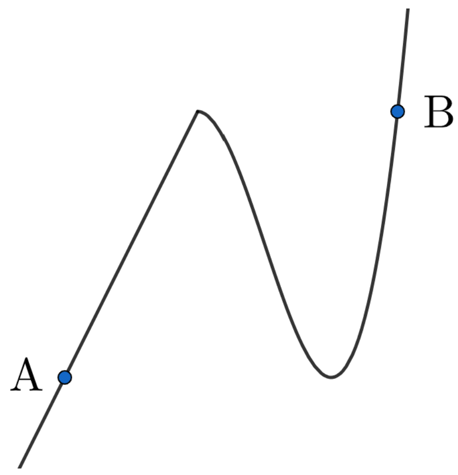
억지로 원의 방정식으로 식을 작성하지 말아야 한다.

21.

정답: 19

해설:

함수 $f(x)$의 그래프의 대략적인 개형은 다음과 같다.



해당 개형에서 함수 $f(x)$의 함숫값이 극솟값이면서 극소점이 아닌 지점을 A, 함숫값이 극댓값이면서 극대점이 아닌 지점을 B라 하자.
만약 두 점 A, B의 x좌표의 차이가 4보다 크다면,
주어진 조건을 만족시키는 t의 값이 무수히 많게 된다.
만약 두 점 A, B의 x좌표의 차이가 4보다 작다면,
임의의 실수 t에 대하여 구간 $(t,\ t+4)$에서 최댓값과 최솟값이 동시에 모두 존재할 수 없게 된다.
따라서 두 점 A, B의 x좌표의 차이는 4이다.
점 B의 x좌표는 b이므로 점 A의 x좌표는 $b-4$이고
함수 $f(x)$의 극솟값은 $-\dfrac{16b^3}{27}$이다.
이로부터 $a(b-4)=-\dfrac{16}{27}b^3$이다.
이를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은 $(16,\ 3)$뿐이므로
$a+b=19$이다.

22.

정답: 39

해설:

1) a_1, a_2 모두 정수인 경우
$a_2=p$라 할 때, $a_3=2p$, $a_4=4p$이다. $p+4p=10$에서
$p=2$이므로 주어진 조건을 만족시키고
이 경우, $a_6=32$이다.
2) a_1은 정수이고 a_2는 정수가 아닌 경우
$a_2=p$라 할 때, $a_3=2p$, $a_4=2p-\frac{7}{2}$이다.
이 경우 $3p-\frac{7}{2}=10$에서 $p=\frac{9}{2}$이다.
a_2는 정수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키고,
이 경우 $a_6=\frac{15}{2}$이다.
3) a_1은 정수가 아니고 a_2가 정수인 경우
$a_2=p$라 할 때, $a_3=p-\frac{7}{2}$, $a_4=2p-7$이고
$3p-7=10$에서 $p=\frac{17}{3}$인데 이는 a_2가 정수라는 조건에 모순이다.
4) a_1, a_2 모두 정수가 아닌 경우
$a_2=p$라 할 때, $a_3=p-\frac{7}{2}$, $a_4=p-7$이고
$2p-7=10$에서 $p=\frac{17}{2}$이다.
이는 주어진 조건을 만족시키고, 이 경우 $a_6=-\frac{1}{2}$이다.
따라서 가능한 서로 다른 모든 a_6의 값의 합은 39이다.

확통 28.

정답: ②

해설:

주어진 조건으로부터 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0부터 3까지의 정수이다.
그리고 Y는 평균이 2인 이항분포를 따른다.
Y가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 할 때, $np=2$이다.
1) $n=2,\ p=1$인 경우
이 경우 $\mathrm{P}(X=1)=1$이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{6}$이라는 조건에 모순이다.
2) $n>3$인 경우
$\mathrm{P}(X=3\ \text{or}\ -5)>0$이어야 하는데,
이산확률변수가 가지는 값이 절댓값이 2이하인 정수라는 조건에 모순이다.

따라서 $n=3,\ p=\frac{2}{3}$이다.
이항분포의 정의에 따라 X의 이산확률분포표를 작성하면 다음과 같다.

	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}-a$	$\frac{1}{27}$	a	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{6}$로부터 $a=\frac{5}{36}$이므로
$\mathrm{P}(|X-1|=1)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=0)=\frac{47}{108}$이다.

확통 29.

정답: 88

해설:

조건 (나)를 만족시키기 위해서는
$a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 홀수가 3개, 짝수가 하나 존재하고 4의 배수가 아니어야 한다.
1) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 짝수를 고르고 $({}_4\mathrm{C}_1)$ 그것을 편의상 d라 하자.
2) 4의 배수가 아닌 2의 배수는 $d=2,\ d=6,\ d=10$가 가능하다.
따라서 각 경우에서
$a+b+c=11,\ a+b+c=7,\ a+b+c=3$이다.
$a,\ b,\ c$가 홀수이므로
$a=2a'+1,\ b=2b'+1,\ c=2c'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c'=4,\ 2,\ 0$이 가능하다.
따라서 각 경우에서 ${}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_2+{}_3\mathrm{H}_0=22$이다.
따라서 $4\times22=88$이다.

확통 30.

정답: 117

해설:

주어진 조건을 만족시키려면 점수의 합이 3인 순간과 6인 순간이 나와서는 안되므로,
다음 순서대로 시행의 결과가 나타나야 한다.
1) 짝, 짝, 홀, 짝 순서대로 나오는 경우
짝수가 나올 확률은 $\frac{3}{4}$, 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{4}$에서
$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$이다.
2) 홀, 홀, 짝, 홀, 짝 순서대로 나오는 경우
앞에서의 비슷한 논리로
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$이다.
이로부터 $p=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{16}\times\frac{9}{64}$이므로
$2^{10}p=117$이다.

미적 28.

정답: ④

해설:

주어진 조건으로부터
$a_m a_{m+2}\neq(a_{m+1})^2$인 자연수 m을 제외한 모든 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+2}=(a_{n+1})^2$, 즉 등비수열을 이룬다.
또한 $a_2=p$라 할 때, $a_4=a_6=4p$이다.
1) 만약 $m=4$가 아니라면, a_4, a_5, a_6은 등비수열을 이루므로 a_4, a_5, a_6의 공비는 1또는 -1이다.
또한 $a_2=p$, $a_4=4p$에서 만약 $m>4$라면 a_2, a_3, a_4의 공비가 -1이어야 하므로 모순이므로 $m<4$이어야 한다.
근데 이 경우, a_4, a_5, a_6, a_7, $\cdots$에서 수열 $\{a_n\}$의 공비가 1또는 -1이 되므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하지 않는다.
2) 곧, $m=4$이어야 한다. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=79+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서
수열 $\{a_n\}$에서 $a_n<0$인 항이 존재한다.
따라서 수열 a_n의 각 항을 다음과 같이 작성할 수 있다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8...
$-\frac{p}{2}$	p	$-2p$	$4p$	$-8p$	$4p$	$-2p$	p...

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=79+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서
$-2\times$(음수인 모든 a_n의 값의 합)$=79$이다.
따라서 $\frac{79}{3}p=79$에서 $p=3$이다.
이로부터 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{4}a_n+\sum_{n=5}^{\infty}a_n=\frac{5}{2}p-\frac{16}{3}p=-\frac{17}{6}p$이다.
이를 통해 계산하면 $a_1\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{51}{4}$이다.

미적 29.

정답: 27

해설:

두 변곡점의 x좌표는 각각 0, $\sqrt{3}$이고

각 지점에서의 미분계수는 t, $-\frac{t}{8}$이다.

이로부터 $\tan f(t)=\frac{9t}{t^2-8}$임을 알 수 있고,

$f'(t)\sec^2 f(t)=\frac{9(t^2-8)-18t^2}{(t^2-8)^2}$이다.

$\tan f(a)=\frac{9}{2}$에서 $a=4$이므로, $f'(a)=-\frac{27}{170}$이다.

미적 30.

정답: 20

해설:

주어진 극한식이 양의 실수로 수렴하려면, 일단 분자가 0으로 수렴하므로
$f(\alpha)=m$(m은 정수)이다.
이때, 주어진 극한값은 $f'(\alpha)\cos\pi f(\alpha)$이다.
만약 $m=2k$(k는 정수)인 경우 $\cos\pi f(\alpha)=1$이므로
$f'(\alpha)>0$이어야 하고
만약 $m=2k-1$(k는 정수)인 경우 $\cos\pi f(\alpha)=-1$이므로
$f'(\alpha)<0$이어야 한다.
$f(\alpha_8)\times f(\alpha_9)=-4$에서
$f(\alpha_8)$, $f(\alpha_9)$의 값으로 가능한 순서쌍은 다음과 같다.
$(-4,\ 1)$, $(-2,\ 2)$, $(-1,\ 4)$, $(1,\ -4)$, $(2,\ -2)$, $(4,\ -1)$

1) $(-4,\ 1)$인 경우
사잇값정리에 의해 $f(\alpha)=-2$ 또는 $f(\alpha)=0$이면서 증가하는 부분이 존재한다.
$\alpha_8<\alpha<\alpha_9$인 α가 존재하지 않아야 하므로
$f(\alpha)=-2$, $f(\alpha)=0$인 순간마다 $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$인데
이 조건을 만족시키는 사차함수는 존재하지 않는다.
마찬가지의 방법으로 $(-1,\ 4)$도 불가능하다.

2) $(1,\ -4)$
사잇값정리에 의해 $f(\alpha)=-1$ 또는 $f(\alpha)=-3$이면서 감소하는 부분이 존재한다.
$\alpha_8<\alpha<\alpha_9$인 α가 존재하지 않아야 하므로
$f(\alpha)=-1$, $f(\alpha)=-3$인 순간마다 $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$인데
이 조건을 만족시키는 사차함수는 존재하지 않는다.
마찬가지의 방법으로 $(4,\ -1)$, $(2,\ -2)$도 불가능하다.

3) $(-2,\ 2)$인 경우
사잇값정리에 의해 $f(\alpha)=0$이면서 증가하는 부분이 존재한다.
$\alpha_8<\alpha<\alpha_9$인 α가 존재하지 않아야 하므로
$f(\alpha)=0$인 순간에서 $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$이다.
$f(4)=0$이므로, $f(x)=ax(x-4)^3$으로 둘 수 있고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
이때, $f(\alpha_8)=-2$가 되도록, 가능한 양수 a의 값을 설정해야 한다.

구간 $(0,\ 1)$에서는 $f(x)$가 감소하므로
$f(x)=2k-1$(k는 정수)

구간 $(1,\ 4)$에서는 $f(x)$가 증가하므로
$f(x)=2k$(k는 정수)일 때에 주목하자.

만약 극솟값이 -9보다 작다면,
$f(\alpha_1)=-1,\ f(\alpha_2)=-3,\ \ldots\ f(\alpha_5)=-9$이므로
$f(\alpha_9)<0$이 되어 모순이다.
극솟값이 -9일 때에는
$f(\alpha_1)=-1,\ f(\alpha_2)=-3,\ \ldots\ f(\alpha_5)=-8,\ f(\alpha_8)=-2$이므로
주어진 조건을 만족시킨다.
따라서 $-27a\geq -9$에서 $a\leq\frac{1}{3}$이므로 $f(5)$의 최댓값은 $\frac{5}{3}$이다.

기하 28.

정답: ④

해설:

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{4k^2+9}+\frac{y^2}{4k^2}=1$으로 나타낼 수 있다.
$(k>0)$
내접원의 넓이의 비에 의해,
내접원의 반지름의 길이의 비가 $1:2$이고,
선분 FF'을 공통으로 할 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF}'}$에서
삼각형 PFF'의 둘레의 길이와 삼각형 QFF'의 둘레의 길이가 같다.
따라서 점 P의 y좌표의 절댓값은 점 Q의 y좌표의 절댓값의 $\frac{1}{2}$이다.
점 P의 y좌표는 k이고, x좌표를 a라 할 때,
$\frac{a^2}{4k^2+9}=\frac{3}{4}$이다.
또한 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{4ka}{4k^2+9}=-\frac{2}{7}\sqrt{21}$
이를 연립하면 $k=\sqrt{3},\ a=\frac{3\sqrt{7}}{2}$이므로
타원의 단축의 길이는 $4\sqrt{3}$이다.

기하 29.

정답: 29

해설:

(나) 조건에서 $(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=8$이므로

$|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2=8$이다.

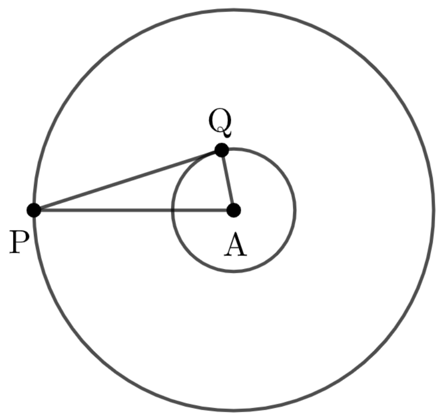
(가) 조건과 연립하면 $|\overrightarrow{AP}|=3$, $|\overrightarrow{AQ}|=1$이다.

또한 $|\overrightarrow{PQ}|=3$에서, 두 점 P, Q는 각각 점 A를 중심으로, 반지름의 길이가 각각 3, 1인 원 위를 움직이며, $\overline{AP}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형을 이룬다.

벡터 $\vec{u}=(1,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}$가 최소가 되려면 점 P의 x좌표가 최소가 되어야 한다.

따라서 다음 그림과 같이 그려진다.

(점 Q는 직선 AP를 기준으로 대칭인 곳에 있을 수도 있다.)



$\cos(\angle APQ)=\dfrac{17}{18}$에서, 점 Q의 x좌표는 $2+\dfrac{17}{6}=\dfrac{29}{6}$이다.

기하 29.

정답: 17

해설:

$\overline{AH_1}=\overline{BH_2}=\overline{H_1H_2}=a$라 하고,

두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$\cos(\angle AH_1B)<0$이므로, $\angle AH_1B$가 둔각이고

이로부터 선분 AB의 길이를

$\sqrt{a^2+a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2}$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{BH_2}=\sqrt{2}a$이므로, 코사인법칙에 의해 선분 AB의 길이는

$\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}}a$이다. 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$이다.

사면체 AH_1H_2B의 부피는

$\dfrac{1}{2}\times a\times a\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}a\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

따라서 $a^3=5\sqrt{5}$, $a=\sqrt{5}$이고,

선분 AB의 길이는 $\sqrt{17}$이다.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.