2017학년도 수능 6월 모평 가형 30번 풀이

#30.

(나)의 양변을 x에 대해 미분.

$$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \cdots ①$$

구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서

$$f(x)=b\cos 3x+c\cos\frac{5}{3}x$$

이고, 함수 $f(x)$가 우함수이므로

구간 $\left[-\frac{a}{2}, 0\right]$에서도

$$f(x)=b\cos 3x+c\cos\frac{5}{3}x.$$

①에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$$\cancel{f\left(\frac{a}{2}\right)}-\cancel{f\left(-\frac{a}{2}\right)}=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

$$-\frac{2}{3}\pi<-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

$$a=\frac{5}{3}\pi$$

(가)의 정적분에 $x=-\frac{a}{2}=-\frac{5}{6}\pi$를 대입.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\left[\frac{b}{3}\sin 3x+\frac{c}{\frac{5}{3}}\sin\frac{5}{3}x\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\frac{2b}{3}+\frac{c}{5}=-1 \cdots ②$$

①의 양변을 미분하면.

$$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

$x=-\frac{a}{2}$를 대입.

$$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$f(x)=f(-x)$의 양변을 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$.

$$2f'\left(\frac{a}{2}\right)=1.$$

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서

$$f(x)=b\cos 3x+c\cos\frac{5}{3}x$$

이고, 함수 $f(x)$가 미분가능하므로.

$$f'(x)=-3b\sin 3x-\frac{5}{3}c\sin\frac{5}{3}x.$$

$x=\frac{a}{2}=\frac{5}{6}\pi$를 대입.

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b\times 1-\frac{5}{3}c\times\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}=-3b-\frac{5}{6}c \cdots ③.$$

②, ③을 연립해서 풀면.

$$b=-\frac{9}{4},\quad c=\frac{5}{2}$$

$$\therefore abc=\frac{5}{3}\pi\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\frac{5}{2}$$

$$=-\frac{75}{8}\pi.$$

작성자: 박수칠@orbi.kr